

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Астраханский государственный университет имени В. Н. Татищева»
(Астраханский государственный университет им. В. Н. Татищева)

СОГЛАСОВАНО
Руководитель ОПОП

_____ М. В. Коломина

«_» сентября 2023 г.

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой ПМИ

_____ М. В. Коломина

«_» сентября 2023 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ
«ПРАКТИКУМ ПО АЛГЕБРЕ»**

Составитель(и)

**Коломина М.В., к.ф.-м.н., доцент, АГУ
Москаленко М. А., к.ф.-м.н., преподаватель, ИТМО
Трифанов А. И., к.ф.-м.н., ИТМО
Ивашиненко Е.А., ст. пр. каф. ФМО,иАГУ**

Направление подготовки / специ-
альность

01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль) ОПОП

Программирование и искусственный интеллект

Квалификация (степень)

бакалавр

Форма обучения

очная

Год приёма

2023

Курс

1

Семестры

1-2

Астрахань – 2023

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

1.1. Целями освоения дисциплины «Практикум по алгебре» являются:

- фундаментальная подготовка в области алгебры и геометрии; овладение методами решения основных типов задач;
- овладение современным математическим аппаратом для дальнейшего использования в приложениях.

1.2. Задачи освоения дисциплины:

- формирование навыков решения практических задач линейной алгебры;
- подготовить к изучению других дисциплин.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП

2.1. Учебная дисциплина «Практикум по алгебре» относится к факультативным дисциплинам и осваивается в 1-2 семестрах.

2.2. Для изучения данной учебной дисциплины необходимы знания, умения и навыки школьной математики на профильном уровне.

2.3. Последующие учебные дисциплины, для которых необходимы знания, умения, навыки, формируемые данной учебной дисциплиной:

- Математический анализ;
- Дифференциальные уравнения;
- Теория вероятностей.

3. ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Процесс освоения дисциплины направлен на формирование элементов следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО и ОПОП ВО по данному направлению подготовки (специальности):

а) общепрофессиональных (ОПК):

- ОПК-1 – способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности;
- ОПК-3 – способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности;

б) профессиональных (ПК):

- ПК-8 – способность понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат.

Таблица 1 – Декомпозиция результатов обучения

Код и наименование компетенции	Планируемые результаты обучения по дисциплине		
	Знать	Уметь	Владеть
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ИОПК-1.1.1 Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук.	ИОПК-1.2.1 Умеет решать стандартные профессиональные задачи с применением математических и естественнонаучных знаний	ИОПК-1.3.1 Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.
ОПК-3. Способен применять и модифициро-	ИОПК-3.1.1 Обладает фундаментальными зна-	ИОПК-3.2.1 Умеет использовать аппарат математиче-	ИОПК-3.3.1 Имеет навыки применения и моди-

Код и наименование компетенции	Планируемые результаты обучения по дисциплине		
	Знать	Уметь	Владеть
вать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности	ниями по математическим моделям для решения прикладных задач.	ских моделей при решении задач в профессиональной деятельности.	фикации математических моделей при решении задач в профессиональной деятельности
ПК-8 Способность понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат.	ИПК-1.1.8 Обладает базовыми знаниями, современного математического аппарата, формальные постановки задач линейной алгебры	ИПК-1.2.1 Умеет владения методами функционального анализа для решения сложных задач информатики, использует для анализа поставленных задач методы линейной алгебры.	ИОПК-1.3.1 Имеет навыки применения современного математического аппарата, обладает навыками алгоритмизации и формализации задач с применением методов линейной алгебры

4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Объём дисциплины составляет 1, 1 зачётные единицы, в том числе 72 часа, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (из них 72 часа –практические занятия).

Таблица 2 – Структура и содержание дисциплины

Раздел, тема дисциплины	Семестр	Контактная работа (в часах)			Самост. работа		Форма текущего контроля успеваемости, форма промежуточной аттестации [по семестрам]
		Л	ПЗ	ЛР	КР	СР	
Раздел 1. Линейная алгебра	1		16				Контрольная работа. Решение задач.
Раздел 2. Аналитическая геометрия.	1		16				Контрольная работа. Решение задач.
Раздел 3. Тензорная алгебра	2		10				Контрольная работа. Решение задач.
Раздел 4. Спектральный анализ	2		10				Контрольная работа Решение задач.
Раздел 5. Евклидово пространство. Ортогональность.	2		10				
Раздел 6. Тензоры и линейные операторы в евклидовом пространстве	2		10				
Итого			72				ЗАЧЕТ

Примечание: Л – лекция; ПЗ – практическое занятие, семинар; ЛР – лабораторная работа; КР – курсовая работа; СР – самостоятельная работа.

Таблица 3 – Матрица соотношения разделов, тем учебной дисциплины формируемых компетенций

Разделы, темы дисциплины	Кол-во часов	Общее количество компетенций			
		ОПК-1	ОПК-3	ПК-8	
Раздел 1	16	+	+	+	3
Раздел 2	16	+	+	+	3
Раздел 3	10	+	+	+	3
Раздел 4	10	+	+	+	3
Раздел 5	10	+	+	+	3
Раздел 6	10	+	+	+	3
Итого	72				

Краткое содержание каждой темы дисциплины

Раздел 1. Линейная алгебра. Теория решения СЛАУ, Теория линейных пространств.

Раздел 2. Аналитическая геометрия. Кривые второго порядка, Прямая и плоскость.

Раздел 3. Тензорная алгебра. Независимое от ПЛФ определение тензора, Полилинейные формы, Линейный оператор.

Раздел 4. Спектральный анализ. Спектральный анализ ЛО общего вида, Инвариантные и корневые подпространства ЛО, Полиномы.

Раздел 5. Евклидово пространство. Ортогональность. Ортогональность, Метрические, нормированные и евклидовы пространства.

Раздел 6. Тензоры и линейные операторы в евклидовом пространстве. Разложения матриц, Метрический тензор.

5. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРЕПОДАВАНИЮ И ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

5.1. Указания для преподавателей по организации и проведению учебных занятий по дисциплине

Практические занятия

Практические занятия – целенаправленная форма организации педагогического процесса, направленная на углубление научно-теоретических знаний и овладение определенными методами работы, в процессе которых вырабатываются умения и навыки выполнения тех или иных учебных действий в данной сфере науки. Они развивают научное мышление и речь, позволяют проверить знания студентов и выступают как средства оперативной обратной связи.

Правильно организованные практические занятия ориентированы на решение следующих задач:

- обобщение, систематизация, углубление, закрепление полученных на лекциях и в процессе самостоятельной работы теоретических знаний по дисциплине (предмету);
- формирование практических умений и навыков, необходимых в будущей профессиональной деятельности, реализация единства интеллектуальной и практической деятельности;
- выработка при решении поставленных задач таких профессионально значимых качеств, как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива.

Состав заданий для практического занятия должен быть спланирован с расчетом, чтобы за отведенное время они могли быть качественно выполнены большинством учащихся.

Практические занятия должны так быть организованы, чтобы студенты ощущали нарастание сложности выполнения заданий, испытывали бы положительные эмоции от переживания собственного успеха в учении, поисками правильных и точных решений.

5.2. Указания для обучающихся по освоению дисциплины

Практическое занятие. Как к нему готовиться

1. Практическое занятие наиболее активный вид учебных занятий в вузе. Он предполагает самостоятельную работу над лекциями и учебными пособиями.
2. К каждому практическому занятию нужно готовиться. Подготовку следует начинать с повторения теории (по записям лекций или по учебному пособию). После этого нужно решать задачи из предложенного домашнего задания.

5.3. Виды и формы письменных работ, предусмотренных при освоении дисциплины, выполняемые обучающимися самостоятельно

Выполнение индивидуальных заданий.

6. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

При реализации различных видов учебной работы по дисциплине «Практикум по алгебре и геометрии» могут использоваться электронное обучение и дистанционные образовательные технологии.

6.1. Образовательные технологии

Таблица 4 – Образовательные технологии, используемые при реализации учебных занятий

Раздел, тема дисциплины	Форма учебного занятия		
	Лекция	Практическое занятие, семинар	Лабораторная работа
Раздел 1. Линейная алгебра	<i>Не предусмотрено</i>	<i>Выполнение практических заданий, контрольных работ, дискуссии</i>	<i>Не предусмотрено</i>
Раздел 2. Аналитическая геометрия.	<i>Не предусмотрено</i>	<i>Выполнение практических заданий, контрольных работ, дискуссии</i>	<i>Не предусмотрено</i>
Раздел 3. Тензорная алгебра	<i>Не предусмотрено</i>	<i>Выполнение практических заданий, контрольных работ, дискуссии</i>	<i>Не предусмотрено</i>
Раздел 4. Спектральный анализ	<i>Не предусмотрено</i>	<i>Выполнение практических заданий, контрольных работ, дискуссии</i>	<i>Не предусмотрено</i>
Раздел 5. Евклидово пространство. Ортогональность.	<i>Не предусмотрено</i>	<i>Выполнение практических заданий, контрольных работ, дискуссии</i>	<i>Не предусмотрено</i>
Раздел 6. Тензоры и линейные операторы в евклидовом пространстве	<i>Не предусмотрено</i>	<i>Выполнение практических заданий, контрольных работ, дискуссии</i>	<i>Не предусмотрено</i>

6.2. Информационные технологии

- использование возможностей интернета в учебном процессе (использование сайта преподавателя (рассылка заданий, предоставление выполненных работ, ответы на вопросы, ознакомление обучающихся с оценками и т. д.);
- использование электронных учебников и различных сайтов (например, электронных библиотек, журналов и т. д.) как источников информации;
- использование возможностей электронной почты преподавателя;
- использование средств представления учебной информации (электронных учебных пособий и практикумов, применение новых технологий для проведения очных (традиционных) лекций и семинаров с использованием презентаций и т. д.);
- использование интегрированных образовательных сред, где главной составляющей являются не только применяемые технологии, но и содержательная часть, т. е. информационные ресурсы (доступ к мировым информационным ресурсам, на базе которых строится учебный процесс);
- использование виртуальной обучающей среды (LMS Moodle «Цифровое обучение») или иных информационных систем, сервисов и мессенджеров.

6.3. Программное обеспечение, современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы

Учебные занятия по дисциплине могут проводиться с применением информационно-телекоммуникационных сетей при опосредованном (на расстоянии) интерактивном взаимодействии обучающихся и преподавателя в режимах on-line и off-line в формах видеоконференции, собеседования в режиме чат, выполнения виртуальных практических заданий.

6.3.1. Программное обеспечение

Наименование программного обеспечения	Назначение
Adobe Reader	Программа для просмотра электронных документов
Платформа дистанционного обучения LMS Moodle	Виртуальная обучающая среда
Microsoft Office 2013	Пакет офисных программ

6.3.2. Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы

1. Электронная библиотека «Астраханский государственный университет» собственной генерации на платформе ЭБС «Электронный Читальный зал – БиблиоТех». <https://biblio.asu.edu.ru>
2. Электронно-библиотечная система (ЭБС) ООО «Политехресурс» «Консультант студента». www.studentlibrary.ru.
3. Электронная библиотечная система издательства ЮРАЙТ, раздел «Легендарные книги». www.biblio-online.ru, <https://urait.ru/>
4. Электронно-библиотечная система BOOK.ru <https://book.ru>

7. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

7.1. Паспорт фонда оценочных средств

При проведении текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине «Практикум по алгебре» проверяется сформированность у обучающихся компетенций, указанных в разделе 3 настоящей программы. Этапность формирования данных компетенций в процессе освоения образовательной программы определяется последовательным освоением дисциплин и прохождением практик, а в процессе освоения дисциплины – последовательным достижением результатов освоения содержательно связанных между собой разделов, тем.

Таблица 5 – Соответствие разделов, тем дисциплины, результатов обучения по дисциплине и оценочных средств

Контролируемый раздел, тема дисциплины	Код контролируемой компетенции	Наименование оценочного средства
Раздел 1. Линейная алгебра	ОПК-1, ОПК-3, ПК-8	Контрольная работа. Задача.
Раздел 2. Аналитическая геометрия.		
Раздел 3. Тензорная алгебра		
Раздел 4. Спектральный анализ		
Раздел 5. Евклидово пространство. Ортогональность.		
Раздел 6. Тензоры и линейные операторы в евклидовом пространстве		

7.2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций, описание шкал оценивания

Таблица 6 – Показатели оценивания результатов обучения в виде знаний

Шкала оценивания	Критерии оценивания
5 «отлично»	демонстрирует глубокое знание теоретического материала, умение обоснованно излагать свои мысли по обсуждаемым вопросам, способность полно, правильно и аргументированно отвечать на вопросы, приводить примеры
4 «хорошо»	демонстрирует знание теоретического материала, его последовательное изложение, способность приводить примеры, допускает единичные ошибки, исправляемые после замечания преподавателя
3 «удовлетворительно»	демонстрирует неполное, фрагментарное знание теоретического материала, требующее наводящих вопросов преподавателя, допускает существенные ошибки в его изложении, затрудняется в приведении примеров и формулировке выводов
2 «неудовлетворительно»	демонстрирует существенные пробелы в знании теоретического материала, не способен его изложить и ответить на наводящие вопросы преподавателя, не может привести примеры

Таблица 7 – Показатели оценивания результатов обучения в виде умений и владений

Шкала оценивания	Критерии оценивания
5 «отлично»	демонстрирует способность применять знание теоретического материала при выполнении заданий, последовательно и правильно выполняет задания, умеет обоснованно излагать свои мысли и делать необходимые выводы
4 «хорошо»	демонстрирует способность применять знание теоретического материала при выполнении заданий, последовательно и правильно выполняет задания, умеет обоснованно излагать свои мысли и делать необходимые выводы, допускает единичные ошибки, исправляемые после замечания преподавателя
3 «удовлетворительно»	демонстрирует отдельные, несистематизированные навыки, испытывает затруднения и допускает ошибки при выполнении заданий, выполняет задание по подсказке преподавателя, затрудняется в формулировке выводов
2 «неудовлетворительно»	не способен правильно выполнить задания

7.3. Контрольные задания и иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения по дисциплине

Вопросы к экзамену (1 семестр)

1. Алгебраические структуры: группа, кольцо, поле.
2. Алгебраические структуры: линейное пространство, алгебра.
3. Поле комплексных чисел.
4. Линейное пространство. Примеры линейных пространств.
5. Линейная зависимость векторов. Основные леммы о линейной зависимости.
6. Базис и размерность линейного пространства.
7. Изоморфизм линейных пространств.
8. Подпространства линейного пространства: определение, примеры, линейная оболочка, линейное многообразие.
9. Подпространства линейного пространства: сумма и пересечение подпространств, прямая сумма, дополнение.
10. Перестановки.
11. Отображения. Линейные формы. Сопряженное пространство.
12. Определители и их основные свойства (без теоремы о разложении определителя по элементам строки или столбца).
13. Теорема о разложении определителя по элементам строки или столбца.
14. Критерий линейной зависимости набора векторов.
15. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре.
16. Линейные операторы и их матричная запись. Примеры.
17. Пространство линейных операторов.
18. Алгебра. Примеры. Изоморфизм алгебр.
19. Алгебра операторов и матриц.
20. Обратная матрица: критерий обратимости, метод Гаусса вычисления обратной матрицы.
21. Обратная матрица: критерий обратимости, вычисление обратной матрицы методом присоединенной матрицы.
22. Ядро и образ линейного оператора. Теорема о ядре и образе. Функции матриц и операторов.
23. Обратный оператор. Критерий существования обратного оператора.

25. Линейные алгебраические системы. Теоремы Крамера и Кронекера-Капелли (формулировки, использующие определители и ранг матрицы).
26. Линейные алгебраические системы. Геометрическое исследование систем.
27. Теорема Крамера (геометрическая формулировка).
28. Геометрическое исследование систем. Теорема Кронекера-Капелли (геометрическая формулировка) и ее следствия.
29. Альтернатива Фредгольма для линейной системы уравнений.
30. Фундаментальная система решений линейной однородной системы. Общее
31. решение однородных и неоднородных систем.
32. Инварианты линейного оператора. Инвариантные подпространства.

Примерные задания для контрольных работ и задач

Раздел 1. Линейная алгебра

Контрольная работа

1. В тетраэдре с вершинами в точках $A(1, 1, 1)$, $B(2, 0, 2)$, $C(2, 2, 2)$, $D(3, -4, 3)$, вычислить высоту $h = |DE|$.
2. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-2}{-2}$, перпендикулярно плоскости $3x + 2y - z - 5 = 0$.
3. Найти необходимое и достаточное условие, при котором плоскости $(\vec{r}, \vec{n}_1) = D_1$ и $(\vec{r}, \vec{n}_2) = D_2$ (а) пересекаются по прямой; (б) параллельны, но не совпадают, (с) совпадают.
4. Доказать, что для данной гиперболы произведения расстояний от любой точки гиперболы до ее асимптот есть величина постоянная. Выразить эту величину через полуоси гиперболы.
5. Постройте тело, ограниченное следующими поверхностями $x^2 + z^2 = 4$, $y = \sqrt{(x^2 + z^2) - 2}$, $y = 2$.

Решение задач

1. Вычислить определитель, разложение по строке или столбцу $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix}$.
2. Исследовать совместимость и найти решение системы уравнений методом Гаусса
$$\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8 \end{cases}$$
3. Найдите все значения x , при которых матрица $R = ABC$ не имеет обратной, где $A = \begin{pmatrix} 2x-1 & -2x+1 \\ x-1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -x-1 & 0 \\ -2x+1 & x-1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} x-1 & -x+1 \\ 4x+1 & -8x-2 \end{pmatrix}$.
4. Решите уравнение: $\begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ x & -7 & -1 \\ 3 & x & -3 \end{vmatrix} = 0$
5. Решите систему уравнений методами Гаусса, Крамера и обратной матрицы:
$$\begin{cases} 2x - y - 2z = -1, \\ 2y + z = 3, \\ -2x - 2y + 2z = -2. \end{cases}$$

Раздел 2. Аналитическая геометрия.

Контрольная работа

1. Найти общее решение неоднородной системы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 3, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 12, \\ x_1 - 2x_3 + 2x_5 = 9, \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 12 \end{cases}$$

2. Вычислите определитель

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 4 & -1 \\ -7 & 5 & -4 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & -8 \\ -9 & 5 & 7 & -3 \end{vmatrix}$$

3. Определить базис и размерность суммы и пересечения подпространства L_1 и L_2 , являющихся линейными оболочками векторов $\vec{a}_1 = (3, -2, -1)^T$, $\vec{a}_2 = (-6, 4, 2)^T$, $\vec{b}_1 = (2, -3, 1)^T$, $\vec{b}_2 = (1, 1, -2)^T$ соответственно.

4. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = (-1 \quad 2)$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -5 \\ -2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$. Найти произведения AB, DC, CD , если это возможно.

5. Составить формулы преобразования координат при переходе от базиса $\{e_k\}_{k=1}^4$ к базису $\{e'_k\}_{k=1}^4$, если

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, e'_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, e'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, e'_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$e'_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Решение задач

1. Найти общее решение неоднородной системы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 3, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 12, \\ x_1 - 2x_3 + 2x_5 = 9, \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 12 \end{cases}$$

2. Вычислите определитель

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 4 & -1 \\ -7 & 5 & -4 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & -8 \\ -9 & 5 & 7 & -3 \end{vmatrix}$$

3. Определить базис и размерность суммы и пересечения подпространства L_1 и L_2 , являющихся линейными оболочками векторов $\vec{a}_1 = (3, -2, -1)^T$, $\vec{a}_2 = (-6, 4, 2)^T$, $\vec{b}_1 = (2, -3, 1)^T$, $\vec{b}_2 = (1, 1, -2)^T$ соответственно.

4. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = (-1 \quad 2)$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -5 \\ -2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$. Найти произведения AB, DC, CD , если это возможно.

5. Составить формулы преобразования координат при переходе от базиса $\{e_k\}_{k=1}^4$ к базису $\{e'_k\}_{k=1}^4$, если

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, e'_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, e'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, e'_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$e'_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Раздел 3. Тензорная алгебра

Контрольная работа

1. Решить систему матричных уравнений: $\begin{cases} AX + BY = C \\ DX + EY = F \end{cases}$, где A, B, C, D, E, F, X, Y – матрицы $(2, 2)$.
2. Указать какой-нибудь базисный минор матрицы A . Ответ обосновать.
3. Тензор a_{kl}^{ij} ранга $(2, 2)$ задан четырехмерной матрицей второго порядка $||A|| = a_{kl}^{ij}$. Задана матрица перехода T . Вычислить элемент a_{21}^{12} в новом базисе.
4. Тензор типа $(0, 3)$ (т.е. три раза контравариантный) задан матрицей $||a^{ijl}||$. Выяснить, является ли этот тензор симметричным (антисимметричным), и если да, то по каким индексам (ответ обосновать).

Решение задач

1. Решить систему матричных уравнений: $\begin{cases} AX + BY = C \\ DX + EY = F \end{cases}$, где A, B, C, D, E, F, X, Y – матрицы $(2, 2)$.
2. Указать какой-нибудь базисный минор матрицы A . Ответ обосновать.
3. Тензор a_{kl}^{ij} ранга $(2, 2)$ задан четырехмерной матрицей второго порядка $||A|| = a_{kl}^{ij}$. Задана матрица перехода T . Вычислить элемент a_{21}^{12} в новом базисе.
4. Тензор типа $(0, 3)$ (т.е. три раза контравариантный) задан матрицей $||a^{ijl}||$. Выяснить, является ли этот тензор симметричным (антисимметричным), и если да, то по каким индексам (ответ обосновать).

Вопросы к экзамену (2 семестр)

1. Алгебраические структуры: группа, кольцо, поле.
2. Алгебраические структуры: линейное пространство, алгебра.
3. Поле комплексных чисел.
4. Линейное пространство. Примеры линейных пространств.
5. Линейная зависимость векторов. Основные леммы о линейной зависимости.
6. Базис и размерность линейного пространства.
7. Изоморфизм линейных пространств.
8. Подпространства линейного пространства: определение, примеры, линейная
9. оболочка, линейное многообразие.
10. Подпространства линейного пространства: сумма и пересечение подпространств, прямая сумма, дополнение.
11. Перестановки.
12. Отображения. Линейные формы. Сопряженное пространство.
13. Определители и их основные свойства (без теоремы о разложении определителя по элементам строки или столбца).
14. Теорема о разложении определителя по элементам строки или столбца.

15. Критерий линейной зависимости набора векторов.
16. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре.
17. Линейные операторы и их матричная запись. Примеры.
18. Пространство линейных операторов.
19. Алгебра. Примеры. Изоморфизм алгебр.
20. Алгебра операторов и матриц.
21. Обратная матрица: критерий обратимости, метод Гаусса вычисления обратной матрицы.
22. Обратная матрица: критерий обратимости, вычисление обратной матрицы методом присоединенной матрицы.
23. Ядро и образ линейного оператора. Теорема о ядре и образе. Функции матриц и операторов.
24. Обратный оператор. Критерий существования обратного оператора.
25. Линейные алгебраические системы. Теоремы Крамера и Кронекера-Капелли (формулировки, использующие определители и ранг матрицы).
26. Линейные алгебраические системы. Геометрическое исследование систем.
27. Теорема Крамера (геометрическая формулировка).
28. Геометрическое исследование систем. Теорема Кронекера-Капелли (геометрическая формулировка) и ее следствия.
29. Альтернатива Фредгольма для линейной системы уравнений.
30. Фундаментальная система решений линейной однородной системы. Общее
31. решение однородных и неоднородных систем.
32. Инварианты линейного оператора. Инвариантные подпространства.

Раздел 4. Спектральный анализ.

Раздел 5. Евклидово пространство. Ортогональность.

Раздел 6. Тензоры и линейные операторы в евклидовом пространстве.

Контрольная работа

1. Оператор общего вида имеет в некотором базисе матрицу A . Найти его минимальный и характеристический полином, сформулировать теорему Гамильтона-Кэли.
2. Автоморфизм $A: R^4 \rightarrow R^4$ имеет спектр $\sigma_A = \{3; -5\}$. При этом второе собственное значение является простым, а спектральная и алгебраическая кратности первого собственного значения совпадают и равны 2. Написать Жорданову форму матрицы данного автоморфизма.
3. Дать определение нормированного пространства.
4. Ортогонализировать следующую систему векторов унитарного пространства со стандартным скалярным произведением $x_1 = (1 + 2i, i)^T$, $x_2 = (i, 1 - i)^T$.

Решение задач

1. Оператор общего вида имеет в некотором базисе матрицу A . Найти его минимальный и характеристический полином, сформулировать теорему Гамильтона-Кэли.
2. Автоморфизм $A: R^4 \rightarrow R^4$ имеет спектр $\sigma_A = \{3; -5\}$. При этом второе собственное значение является простым, а спектральная и алгебраическая кратности первого собственного значения совпадают и равны 2. Написать Жорданову форму матрицы данного автоморфизма.
3. Дать определение нормированного пространства.
4. Ортогонализировать следующую систему векторов унитарного пространства со стандартным скалярным произведением $x_1 = (1 + 2i, i)^T$, $x_2 = (i, 1 - i)^T$.
- 5.

Таблица 8 – Примеры оценочных средств с ключами правильных ответов

№ п/п	Тип задания	Формулировка задания	Правильный ответ	Время выполнения (в минутах)
Код и наименование проверяемой компетенции ОПК-1 – Способен применять математические, естественнонаучные и общепрофессиональные знания для понимания окружающего мира и для решения задач профессиональной деятельности				
1.	Задание закрытого типа	Если в высказывании нет скобок, то порядок выполнения следующий: 1. $\&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg$ 2. $\neg, \&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ 3. $\neg, \vee, \&, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ 4. $\neg, \&, \vee, \Leftrightarrow, \Rightarrow$	3	1-3
2.		Какие числа в перестановки 3, 5, 4, 1, 2 числа образуют инверсию? 1. 3,4 2. 3,1 3. 1,2 4. 3,5	2	1-3
3.		Проверьте, пропорциональны ли векторы $\vec{a} = (4, -2, 1)$, $\vec{b} = (8, -4, 4)$	Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не пропорциональны	5-7
4.		Ассоциативный закон для матриц A и B имеет вид: 1. $(A+B) \cdot C = AC+BC$ 2. $(AB) \cdot C = A \cdot (BC)$ 3. $(A+B)+C = A+B+C$	2	1-3
5.		Модуль комплексного числа $z = 1 + i$ равен: 1. 1 2. 2 3. $\sqrt{2}$ 4. $\sqrt{1+i}$	2	1-3
6.	Задание открытого типа	В классе учатся 16 мальчиков и 10 девочек. Сколькими способами можно назначить одного дежурного?	Дежурным можно назначить либо мальчика, либо девочку, т.е. дежурным может быть любой из 16 мальчиков, либо любая из 10 девочек. По правилу суммы получаем, что одного дежурного можно назначить $16+10=26$ способами.	2-5
7.		Определите, истина ли формула $(P \Rightarrow A) \& (P \vee A)$	Ложна	3-5
8.		Определите четная или нечетная подстановка $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.	В ее верхней строке 4 инверсии, в нижней 7 инверсий. Общее число инверсий в двух строках есть 11, и поэтому подстановка нечетна.	3-5
9.		Найдите обратную матрицу матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$	$A^{-1} = \begin{bmatrix} -7/3 & 2 & -1/3 \\ 5/3 & -1 & -1/3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	7-10
10.		Запишите систему $x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7$ $8x_1 - 2x_2 + x_3 + 9x_4 = 21$ $6x_1 - x_2 + x_3 + 6x_4 = 17$ $x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 8$ в матричной форме.	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 8 & -2 & 1 & 9 \\ 6 & -1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 21 \\ 17 \\ 8 \end{pmatrix}$	3-5
Код и наименование проверяемой компетенции				

№ п/п	Тип задания	Формулировка задания	Правильный ответ	Время выполнения (в минутах)																														
ОПК-3 – Способен формулировать, строить и применять модели для управления достижением планируемых результатов процессов и объектов профессиональной деятельности на базе знаний математики, программирования и программного обеспечения																																		
1.	Задание закрытого типа	Верна ли таблица истинности? <table><tr><td>A</td><td>B</td><td>↔</td></tr><tr><td>И</td><td>И</td><td>Л</td></tr><tr><td>И</td><td>Л</td><td>И</td></tr><tr><td>Л</td><td>И</td><td>И</td></tr><tr><td>Л</td><td>Л</td><td>Л</td></tr></table>	A	B	↔	И	И	Л	И	Л	И	Л	И	И	Л	Л	Л	Нет <table><tr><td>A</td><td>B</td><td>↔</td></tr><tr><td>И</td><td>И</td><td>И</td></tr><tr><td>И</td><td>Л</td><td>Л</td></tr><tr><td>Л</td><td>И</td><td>Л</td></tr><tr><td>Л</td><td>Л</td><td>И</td></tr></table>	A	B	↔	И	И	И	И	Л	Л	Л	И	Л	Л	Л	И	1-3
A		B	↔																															
И		И	Л																															
И		Л	И																															
Л		И	И																															
Л	Л	Л																																
A	B	↔																																
И	И	И																																
И	Л	Л																																
Л	И	Л																																
Л	Л	И																																
2.	Верно ли утверждение: определитель не меняется при транспонировании.	верно	1-3																															
3.	Сколько рациональных корней имеет многочлен $24x^5 + 10x^4 - x^3 - 19x^2 - 5x + 6$? 1. 5 2. 4 3. 3 4. 2 5. 1 6. 0	3	10-12																															
4.	Найдите такое число c , чтобы многочлен $P(x) = x^5 - x^4 + cx^3$ делился на двучлен $x + 4$: 1. $c = 0$ 2. $c = -10$ 3. $c = -20$ 4. $c = 20$	3	5-7																															
5.	Найдите последовательность транспозиций переводящую перестановку 1, 2, 4, 3, 5 в перестановку 2, 5, 3, 4, 1;	Возможный вариант: 12345→(меняем местами символы 2 и 1) 21435→(меняем местами символы 1 и 5) 25431→(меняем местами символы 4 и 3) 25341. Таким образом, имеем нечетное число транспозиций – 3	3-5																															
6.	Задание открытого типа	Имеется 2 ящика. В одном лежит m разноцветных кубиков, а в другом- k разноцветных шариков. Сколькими способами можно выбрать пару «Кубик-шарик»?	Выбор шарика не зависит от выбора кубика, и наоборот. Поэтому, число способов, которыми можно выбрать данную пару равно $m \cdot k$.	2-5																														
7.		Возведите сумму в степень, используя Бином Ньютона: $(a + b)^6$	$(a + b)^6 = C_6^0 \cdot a^6 + C_6^1 \cdot a^5 \cdot b + C_6^2 \cdot a^4 \cdot b^2 + C_6^3 \cdot a^3 \cdot b^3 + C_6^4 \cdot a^2 \cdot b^4 + C_6^5 \cdot a \cdot b^5 + C_6^6 \cdot a^0 \cdot b^6$ $= a^6 + 6 \cdot a^5 \cdot b + 15 \cdot a^4 \cdot b^2 + 20 \cdot a^3 \cdot b^3 + 15 \cdot a^2 \cdot b^4 + 6 \cdot a \cdot b^5 + b^6.$	7-10																														
8.		Вычислите определитель 3-го порядка $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$	Ответ: 1	5-7																														
9.		Подобрать i и k так, чтобы произведение $a_{1i}a_{32}a_{4k}a_{25}a_{53}$ входило в	При $i = 1, k = 4$ произведение $a_{1i}a_{32}a_{4k}a_{25}a_{53}$ входит	5-7																														

№ п/п	Тип задания	Формулировка задания	Правильный ответ	Время выполнения (в минутах)
		определитель 5-го порядка со знаком плюс.	в определитель 5-го порядка со знаком «+»	
10.		При каком значении параметра m векторы $\vec{a} = (m, \frac{1}{2}, -2, 4, \frac{1}{4}, 2, -\frac{1}{16})$ и $\vec{b} = (4, 2, -8, 16, 1, 8, -\frac{1}{4})$ будут пропорциональны?	$m = 1$	5-7
Код и наименование проверяемой компетенции ПК-8 – Способность понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат				
1.	Задание закрытого типа	В ящике находится n разноцветных шаров. Произвольным образом вынимается 1 шарик. Сколькими способами это можно сделать? 1. n способами 2. $n + 1$ способами 3. $n!$ способами 4. n^2 способами	1	1-3
2.		Число a корнем многочлена $P(x) = 2x^4 + 5x^3 - 2x^2 - 9$, если 1. $a = -3$ 2. $a = 0$ 3. $a = 3$ 4. $a = -2$	1	3-5
3.		Кратность корня $x = 2$ многочлена $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ равна: 1. 0 2. 1 3. 2 4. 3	2	5-7
4.		Решение матричного уравнения $AX = C$ при $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ равно: 1. $\begin{pmatrix} -5 & 5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ \frac{13}{2} & -\frac{13}{2} \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} -5 & 5 \\ -\frac{13}{2} & \frac{13}{2} \end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$	3	7-10
5.		Чтобы разрешить уравнение $XB = C$ относительно X нужно: 1. умножить обе его части на B^{-1} справа 2. умножить обе его части на B^{-1} слева 3. умножить обе его части на $\frac{1}{B}$ справа 4. умножить обе его части на $\frac{1}{B}$ слева	1	1-3
6.	Задание открытого типа	Определить характер четности перестановки 3, 5, 4, 1, 2	Перестановка нечетная	3-5
7.		С каким знаком в определитель 6-го порядка входят произведения (первый индекс – номер строки, второй – но-	Со знаком +.	7-10

№ п/п	Тип задания	Формулировка задания	Правильный ответ	Время выполнения (в минутах)
8.		мер столбца): $a_{14}a_{23}a_{31}a_{56}a_{42}a_{65}$; Даны векторы $\vec{a} = (11, 4, 6)$, $\vec{b} = (2, 8, -3)$, $\vec{c} = (5, -2, -1)$ найти вектор $\vec{d}$, если: $\vec{d} = 3\vec{a} + 4\vec{b} - 2\vec{c}$	(31,24,8)	5-7
9.		Решите систему $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3 \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$	Система имеет бесконечное множество решений вида $\{(7+12a+b)/18; a; (1-5b)/6; b\}$ где a, b - произвольные действительные числа. Других решений система не имеет.	10-15
10.		Разложите рациональную дробь в сумму простых дробей $\frac{2x^4 - 10x^3 + 7x^2 + 4x + 3}{x^5 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 2}$	$\frac{3}{x+2} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{2}{x-1} + \frac{x-3}{x^2+1}$	15-20

7.4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине

Таблица 9 – Технологическая карта рейтинговых баллов по дисциплине

№ п/п	Контролируемые мероприятия	Количество мероприятий / баллы	Максимальное количество баллов	Срок представления
1 семестр				
Основной блок				
1.	Написание контрольных работ	2/25	50	1 семестр
2.	Решение задач	2/20	40	1 семестр
Всего			90	
Блок бонусов				
3.	Посещение занятий		10	1 семестр
ИТОГО			100	
2 семестр				
Основной блок				
4.	Написание контрольных работ	2/20	40	2 семестр
5.	Решение задач	2/25	50	2 семестр
Всего			90	
Блок бонусов				
6.	Посещение занятий		10	2 семестр
Всего			10	
ИТОГО			100	

Таблица 10 – Система штрафов (для одного занятия)

Показатель	Балл
Опоздание на занятие	-1
Нарушение учебной дисциплины	-5
Неготовность к занятию	-1
Пропуск занятия без уважительной причины	-1

Таблица 11 – Шкала перевода рейтинговых баллов в итоговую оценку за семестр по дисциплине

Сумма баллов	Оценка по 4-балльной шкале
90–100	5 (отлично)
85–89	4 (хорошо)
75–84	
70–74	
65–69	3 (удовлетворительно)

Сумма баллов	Оценка по 4-балльной шкале
60–64	
Ниже 60	2 (неудовлетворительно)

При реализации дисциплины в зависимости от уровня подготовленности обучающихся могут быть использованы иные формы, методы контроля и оценочные средства, исходя из конкретной ситуации.

8. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

8.1. Основная литература

1. Беклемишев, Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры : Учеб. для вузов. / Беклемишев Д. В. - 12-е изд., испр. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2009. - 312 с. - ISBN 978-5-9221-0979-6. - Текст : электронный // ЭБС "Консультант студента" : [сайт]. - URL : <https://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922109796.html> (ЭБС «Консультант студента»)
2. Беклемишева, Л. А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре : учебное пособие / Беклемишева Л. А. , Петрович А. Ю. , Чубаров И. А. ; Под ред. Д. В. Беклемишева. - 2-е изд., перераб. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2006. - 496 с. - ISBN 5-9221-0010-6. - Текст : электронный // ЭБС "Консультант студента" : [сайт]. - URL : <https://www.studentlibrary.ru/book/ISBN5922100106.html> (ЭБС «Консультант студента»)
3. Элементы линейной алгебры [Электронный ресурс]: учебное пособие / Т.А. Гулай, А.Ф. Долгополова, В.А. Жукова, С.В. Мелешко, И.А. Невидомская - Ставрополь : АГРУС Ставропольского гос. аграрного ун-та, 2017. URL: http://www.studentlibrary.ru/book/stavgau_00145.html (ЭБС «Консультант студента»).
4. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре [Электронный ресурс] / Ю.М. Смирнова - М.: Логос, 2017. URL: <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN5940103758.html> (ЭБС «Консультант студента»).
5. Линейная алгебра и аналитическая геометрия [Электронный ресурс] / Протасов Ю.М. - М. : ФЛИНТА, 2017. URL: <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785976509566.html> (ЭБС «Консультант студента»).
6. Аналитическая геометрия. Векторная алгебра. Кривые второго порядка [Электронный ресурс]: Учеб. пособие. / Под ред. А.А. Грешилова - М.: Логос, 2017. URL: <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN5940102042.html> (ЭБС «Консультант студента»).

8.2. Дополнительная литература

1. Алгебра и теория чисел [Электронный ресурс]: учебное пособие / Сикорская Г.А. - Оренбург: ОГУ, 2017. URL: <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785741019436.html> (ЭБС «Консультант студента»).
2. Справочное пособие по высшей математике [Электронный ресурс]: учебное пособие / Бутырин В.И. URL: Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2016. - <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785778229402.html> (ЭБС «Консультант студента»).

8.3. Интернет-ресурсы, необходимые для освоения дисциплины

1. Электронно-библиотечная система (ЭБС) ООО «Политехресурс» «Консультант студента». www.studentlibrary.ru

9. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Наличие учебной аудитории с доской или мультимедиа аудитории.

Рабочая программа дисциплины при необходимости может быть адаптирована для обучения (в том числе с применением дистанционных образовательных технологий) лиц с ограниченными возможностями здоровья, инвалидов. Для этого требуется заявление обучающихся, являющихся лицами с ограниченными возможностями здоровья, инвалидами, или их законных представителей и рекомендации психолого-медико-педагогической комиссии.

Для инвалидов содержание рабочей программы дисциплины может определяться также в соответствии с индивидуальной программой реабилитации инвалида (при наличии).