МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Астраханский государственный университет имени В. Н. Татищева»
(Астраханский государственный университет им. В. Н. Татищева)

СОГЛАСОВАНО	УТВЕРЖДАЮ
Руководитель ОПОП	Заведующий кафедрой ТФ и МПФ
А.М. Лихтер	И.А. Крутова
«27» июня 2022 г.	«28» июня 2022 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ
Численные методы и математическое моделирование

Составитель(-и)	**Исмухамбетова А.С., кандидат пед. наук, доцент кафедры теоретической физики и методики преподавания физики**
Направление подготовки	**03.03.02 Физика**
Направленность (профиль) ОПОП	**Инженерная физика**
Квалификация (степень)	**бакалавр**
Форма обучения	**очная**
Год приема	**2022**
Курс	**1**
семестр	**2**

Астрахань, 2022 г.

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

1.1. Целями освоения дисциплины являются формирование базы для развития профессиональных компетенций, а именно, изучение основных понятий информационных процессов, овладение численными методами и основными приемами математического моделирования с целью их дальнейшего применения в профессиональной деятельности.

1.2. Задачи освоения дисциплины (модуля): изучение основных понятий информационных процессов, овладение численными методами и основными приемами математического моделирования с целью их дальнейшего применения в профессиональной деятельности**.**

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП

2.1. Учебная дисциплина относится к факультативным дисциплинам, изучается во 2 семестре.

2.2. Для изучения данной учебной дисциплины (модуля) необходимы следующие знания, умения и навыки, формируемые предшествующими учебными дисциплинами*:* «Математика», "Программирование», «Вычислительная физика» в вузе.

Знания: основные понятия численных методов математики и основы математического моделирования.

Умения: уметь численно решать задачи, сформулированные в виде математических уравнений.

Навыки: навыками численного анализа математических проблем физики.

2.3. Последующие учебные дисциплины, для которых необходимы знания, умения и навыки, формируемые данной учебной дисциплиной: теоретическая механика, компьтерный практикум по инженерной физике, теоретическая физика.

3. ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

Процесс освоения дисциплины направлен на формирование элементов следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО и ОПОП ВО по данному направлениюподготовки (специальности):
ОПК -2: способностью использовать в профессиональной деятельности базовые знания фундаментальных разделов математики, создавать математические модели типовых профессиональных задач и интерпретировать полученные результаты с учетом границ применимости моделей (ОПК-2).

Таблица 1. Декомпозиция результатов обучения

Код компетенции	Планируемые результаты освоения дисциплины		
	Знать (1)	Уметь (2)	Владеть (3)
ОПК-2: способностью использовать в профессиональной деятельности базовые знания фундаментальных разделов математики, создавать математические	ИОПК-2.1. Основные понятия численных методов математики и основы математического моделирования.	ИОПК-2.2. Уметь численно решать задачи, сформулированные в виде математических уравнений	ИОПК- 2.3. Навыками численного анализа математических проблем физики

модели типовых профессиональных задач и интерпретировать полученные результаты с учетом границ применимости моделей			

4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Общая трудоемкость дисциплины – 72 часа, из них 54 часа – аудиторных занятий, Лекций – 18 часов, лабораторных занятий – 36 часов. Зачетных единиц 2.

Таблица 2. Структура и содержание дисциплины (модуля)

№ п/п	Наименование радела (темы)	Семестр	Неделя семестра	Контактная работа (в часах)			Самостоятельная работа		Формы текущего контроля успеваемости *(по неделям семестра)* Форма промежуточной аттестации *(по семестрам)*
				Л	ПЗ	ЛР	КР	СР	
1	Приближенные вычисления, погрешности.	2	1-2	2		4	-	2	Л/р 1
2	Интерполяция и приближение функций.	2	3-4	2		4	-	2	Л/р 2
3	Численное решение нелинейных уравнений.	2	5-6	2		4	-	2	Л/р 3
4	Решение систем уравнений.	2	7-8	2		4	-	2	Л/р 4
5	Численное дифференцирование. Численное интегрирование.	2	9-10	2		4	-	2	Л/р 5
6	Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений.	2	11-12	2		4	-	2	Л/р 6
7	Численные методы решения краевой	2	13-14	2		4	-	2	Л/р 7

	задачи и задач на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений.								
8	Математическое моделирование.	2	15-16	2		4	-	2	Л/р 8
9	Обработка экспериментальных данных.	2	17-18	2		4	-	2	Л/р 9
	ИТОГО			**18**		**36**	**-**	**18**	**ЗАЧЕТ**

Условные обозначения:

Л – занятия лекционного типа; ПЗ – практические занятия, ЛР – лабораторные работы; КР – курсовая работа; СР – самостоятельная работа по отдельным темам

Таблица 3. Матрица соотнесения тем/разделов учебной дисциплины/модуля и формируемых в них компетенций

Темы, разделы дисциплины	Кол-во часов	Компетенции		
		1	2	общее количество компетенций
Тема 1. Приближенные вычисления, погрешности.	8		ОПК	1
Тема 2. Интерполяция и приближение функций.	8		ОПК	1
Тема 3. Численное решение нелинейных уравнений.	8		ОПК	1
Тема 4. Решение систем уравнений.	8		ОПК	1
Тема 5. Численное дифференцирование. Численное интегрирование.	8		ОПК	1
Тема 6. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений.	8		ОПК	1
Тема 7. Численные методы решения краевой задачи и задач на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений.	8		ОПК	1
Тема 8. Математическое моделирование.	8		ОПК	1
Тема 9. Обработка экспериментальных данных.	8		ОПК	1
Итого	***72***			

Краткое содержание каждой темы дисциплины (модуля)

Тема 1. Приближенные вычисления, погрешности. Приближенные вычисления, погрешности. Вычисление значений простейших функций. Приближенные вычисления с помощью дифференциала. Приближенные вычисления значений функций с помощью рядов.

Тема 2. Интерполяция и приближение функций.

Интерполяция и приближение функций. Интерполяционные полиномы. Наилучшее приближение. Среднеквадратичное приближение. Равномерное приближение. Сплайн интерполяция.

Тема 3. Численное решение нелинейных уравнений.

Поиск корней нелинейных уравнений. Итерационные методы. Метод Ньютона. Отделение корней. Комплексные корни.

Тема 4. Решение систем уравнений. Решение систем уравнений. Вычислительные методы линейной алгебры. Прямые и итерационные процессы. Задачи на собственные значения.

Тема 5. Численное дифференцирование. Численное интегрирование. Численное дифференцирование. Численное интегрирование. Численное интегрирование быстро осциллирующих функций. Многомерные интегралы. Методы Монте-Карло.

Тема 6. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Задача Коши для ОДУ и методы ее решения. Интегрирование уравнений второго и высших порядков.

Тема 7. Численные методы решения краевой задачи и задач на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений. Численные методы решения краевой задачи и задач на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений. Вычислительные методы решения краевых задач математической физики. Разностные схемы. Аппроксимация. Устойчивость. Сходимость.

Тема 8. Математическое моделирование. Математические модели. Описание объектов, явлений и процессов с помощью математики. Цели моделирования. Этапы построения модели. Статические и динамические, линейные и нелинейные модели. Модели динамических систем. Модель движения тела, брошенного под углом к горизонту. Модели биологических популяций «хищники-жертвы».

Тема 9. Обработка экспериментальных данных. Обработка экспериментальных данных. Линейная регрессия. Метод наименьших квадратов.

5. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРЕПОДАВАНИЮ И ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

5.1. Указания для преподавателей по организации и проведению учебных занятий по дисциплине (модулю)

Текущий контроль предусматривает: учет активности студентов в ходе проведения практических занятий, итоговый контроль проводится в форме устного зачета по темам дисциплины. Итоговая оценка формируется как взвешенная сумма оценки, накопленной в течение курса.

5.2. Указания для обучающихся по освоению дисциплины

Приступая к изучению дисциплины, студенту необходимо внимательно ознакомиться с тематическим планом занятий, списком рекомендованной литературы. Следует уяснить последовательность выполнения индивидуальных учебных заданий. Самостоятельная работа студента предполагает работу с научной и учебной литературой. Уровень и глубина усвоения дисциплины зависят от активной и систематической работы, изучения рекомендованной литературы, выполнения лабораторных работ .

Таблица 4

Содержание самостоятельной работы обучающихся

Номер радела (темы)	Темы/вопросы, выносимые на самостоятельное изучение	Кол-во часов	Формы работы
1	Приближенные вычисления, погрешности.	*2*	работа с научной и учебной литературой, подготовка к лабораторным работам, зачету
2	Интерполяция и приближение функций.	*2*	работа с научной и учебной литературой, подготовка к лабораторным работам, зачету
3	Численное решение нелинейных уравнений.	*2*	работа с научной и учебной литературой, подготовка к лабораторным работам, зачету
4	Решение систем уравнений.	*2*	работа с научной и учебной литературой, подготовка к лабораторным работам, зачету
5	Численное дифференцирование. Численное интегрирование.	*2*	работа с научной и учебной литературой, подготовка к лабораторным работам, зачету
6	Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений.	*2*	работа с научной и учебной литературой, подготовка к лабораторным работам, зачету
7	Численные методы решения краевой задачи и задач на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений.	*2*	работа с научной и учебной литературой, подготовка к лабораторным работам, зачету
8	Математическое моделирование.	*2*	работа с научной и учебной литературой, подготовка к лабораторным работам, зачету
9	Обработка экспериментальных данных.	*2*	работа с научной и учебной литературой, подготовка к лабораторным работам, зачету

5.3. Виды и формы письменных работ, выполняемые обучающимися самостоятельно, не предусмотрены.

6. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Возможно применение электронного обучения и дистанционных образовательных технологий. В соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки реализация компетентностного подхода предусматривает широкое использование в учебном процессе активных и интерактивных форм проведения занятий в сочетании с внеаудиторной работой с целью формирования и развития требуемых компетенций обучающихся.

6.1. Образовательные технологии

Учебные занятия по дисциплине могут проводиться с применением информационно-телекоммуникационных сетей при опосредованном (на расстоянии) интерактивном взаимодействии обучающихся и преподавателя в режимах on-line или off-line в формах: видеолекций, лекций-презентаций, видеоконференции, собеседования в режиме чат, форума, выполнения лабораторных работ.

Таблица 5

Образовательные технологии, используемые при реализации учебных занятий

Раздел, тема дисциплины (модуля)	Форма учебного занятия		
	Лекция	Практическое занятие, семинар	Лабораторная работа
Тема 1. Приближенные вычисления, погрешности.	*видеолекция*	*не предусмотрено*	*выполнение лабораторных работ*
Тема 2. Интерполяция и приближение функций.	*лекция-презентация*	*не предусмотрено*	*выполнение лабораторных работ*
Тема 3. Численное решение нелинейных уравнений.	*видеолекция*	*не предусмотрено*	*выполнение лабораторных работ*
Тема 4. Решение систем уравнений.	*лекция-презентация*	*не предусмотрено*	*выполнение лабораторных работ*
Тема 5. Численное дифференцирование. Численное интегрирование.	*видеолекция*	*не предусмотрено*	*выполнение лабораторных работ*
Тема 6. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений.	*лекция-презентация*	*не предусмотрено*	*выполнение лабораторных работ*
Тема 7. Численные методы решения краевой задачи и задач на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений.	*видеолекция*	*не предусмотрено*	*выполнение лабораторных работ*
Тема 8. Математическое моделирование.	*видеолекция*	*не предусмотрено*	*выполнение лабораторных работ*
Тема 9. Обработка экспериментальных данных.	*лекция-презентация*	*не предусмотрено*	*выполнение лабораторных работ*

№	Формы	Описание
1	Компьютерные расчеты с использованием математического пакета Mathcad-14	Численные методы вычисления интегралов и производных функций, решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений и систем уравнений. Генерирование случайных чисел, метод Монте-Карло.
2	Компьютерные расчеты с использованием математического пакета Maple-14	Решение нелинейных алгебраических уравнений, дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений.
3	Компьютерное моделирование физических систем на основе дифференциальных уравнений	Решение динамических уравнений механики для движения тел в поле упругих и гравитационных сил с учетом сопротивления среды. Модели статистических распределений.

6.2. Информационные технологии

Информационные технологии, используемые при реализации различных видов учебной и внеучебной работы:

- использование возможностей Интернета в учебном процессе: рассылка заданий, предоставление выполненных работ, ответы на вопросы, ознакомление учащихся с оценками и т.д.;

- использование электронных учебников и различных сайтов как источников информации;

- использование электронной почты преподавателя;

- использование средств представления учебной информации: электронных учебных пособий и практикумов, применение новых технологий для проведения очных лекций и семинаров с использованием презентаций и т.д.;

- использование интегрированных образовательных сред, где главной составляющей являются не только применяемые технологии, но и содержательная часть, т.е. информационные ресурсы;

- использование виртуальной обучающей среды (или системы управления обучением LMS Moodle) или иных информационных систем, сервисов и мессенджеров.

6.3. Перечень программного обеспечения и информационных справочных систем

6.3.1. Программное обеспечение

Наименование программного обеспечения	Назначение
Adobe Reader	Программа для просмотра электронных документов
MathCad 14	Система компьютерной алгебры из класса систем автоматизированного проектирования, ориентированная на подготовку интерактивных документов с вычислениями и визуальным сопровождением, отличается лёгкостью использования
Moodle	Образовательный портал ФГБОУ ВО «АГУ»
Mozilla FireFox	Браузер
Microsoft Office 2013, Microsoft Office Project 2013 , Microsoft Office Visio 2013	Офисная программа
7-zip	Архиватор

Microsoft Windows 7 Professional	Операционная система
Платформа дистанционного обучения LMS Moodle	Виртуальная обучающая среда

6.3.2. Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы

1. Электронный каталог Научной библиотеки АГУ на базе MARKSQL НПО «Информ-систем».

https://library.asu.edu.ru

2. Электронная библиотека «Астраханский государственный университет» собственной генерации на электронной платформе ООО «БИБЛИОТЕХ».

https://biblio.asu.edu.ru

3. Электронная библиотечная система (ЭБС) ООО «Политехресурс» «Консультант студента».www.studentlibrary.ru.

4. Электронная библиотека МГППУ. http://psychlib.ru.

7. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

7.1. Паспорт фонда оценочных средств.

При проведении текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине «Численные методы и матмоделирование» проверяется сформированность у обучающихся компетенций, указанных в разделе 3 настоящей программы. Этапность формирования данных компетенций в процессе освоения образовательной программы определяется последовательным освоением дисциплин (модулей) и прохождением практик, а в процессе освоения дисциплины (модуля) – последовательным достижением результатов освоения содержательно связанных между собой разделов, тем.

Таблица 6.

Соответствие изучаемых разделов, результатов обучения и оценочных средств

№ п/п	Контролируемые разделы дисциплины (модуля)	Код контролируемой компетенции (компетенций)	Наименование оценочного средства
1	Приближенные вычисления, погрешности.	***ОПК-2***	***Л/р№1***
2	Интерполяция и приближение функций.	***ОПК-2***	***Л/р№2***
3	Численное решение нелинейных уравнений.	***ОПК-2***	***Л/р№3***
4	Решение систем уравнений.	***ОПК-2***	***Л/р№4***
5	Численное дифференцирование. Численное интегрирование.	***ОПК-2***	***Л/р№5***
6	Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений.	***ОПК-2***	***Л/р№6***

7	Численные методы решения краевой задачи и задач на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений.	***ОПК-2***	***Л/р№7***
8	Математическое моделирование.	***ОПК-2***	***Л/р№8***
9	Обработка экспериментальных данных.	***ОПК-2***	***Л/р№9***

7.2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций, описание шкал оценивания

Таблица 7

Показатели оценивания зачета

Шкала оценивания	Критерии оценивания
5 «отлично»	демонстрирует глубокое знание теоретического материала, умение обоснованно излагать свои мысли по обсуждаемым вопросам, способность полно, правильно и аргументированно отвечать на вопросы, приводить примеры
4 «хорошо»	демонстрирует знание теоретического материала, его последовательное изложение, способность приводить примеры, допускает единичные ошибки, исправляемые после замечания преподавателя
3 «удовлетворительно»	демонстрирует неполное, фрагментарное знание теоретического материала, требующее наводящих вопросов преподавателя, допускает существенные ошибки в его изложении, затрудняется в приведении примеров и формулировке выводов
2 «неудовлетворительно»	демонстрирует существенные пробелы в знании теоретического материала, не способен его изложить и ответить на наводящие вопросы преподавателя, не может привести примеры

Таблица 8

Показатели оценивания результатов лабораторных работ

Шкала оценивания	Критерии оценивания
5 «отлично»	демонстрирует способность применять знание теоретического материала при выполнении заданий, последовательно и правильно выполняет задания, умеет обоснованно излагать свои мысли и делать необходимые выводы
4 «хорошо»	демонстрирует способность применять знание теоретического материала при выполнении заданий, последовательно и правильно выполняет задания, умеет обоснованно излагать свои мысли и делать необходимые выводы, допускает единичные ошибки, исправляемые после замечания преподавателя
3 «удовлетворительно»	демонстрирует отдельные, несистематизированные навыки, неспособен применить знание теоретического материала при выполнении заданий, испытывает затруднения и допускает ошибки при выполнении заданий, выполняет задание при подсказке преподавателя, затрудняется в формулировке выводов
2	не способен правильно выполнить задание

«неудовлетворительно»	

7.3. Контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Тема 1. «*Приближенные вычисления, погрешности*»

Лабораторная работа №1.

1. Вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $y = \sqrt{x^2 + x + 3}$ в точке $x = 1{,}97$.

2. Вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x^2 + x + 1}}$ в точке $x = 1{,}04$.

3. Вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $f(x) = \arcsin x$ в точке $x = 0{,}08$.

4. Вычислить приближенно с помощью дифференциала $tg 47°$, результат округлить до двух знаков после запятой.

Приближенные вычисления значений функций с помощью рядов.

1. Вычислить приближенно $e^{0,1}$ с помощью разложения в степенной ряд с точностью до 0,001.

2. Вычислить приближенно $\ln 1{,}1$ с помощью разложения в степенной ряд с точностью до 0,001.

Тема 2. «Интерполяция и приближение функций»

Лабораторная работа №2.

Аппроксимация функций заключается в приближенной замене заданной функции $f(x)$ некоторой функцией $\varphi(x)$ так, чтобы отклонение функции $\varphi(x)$ от $f(x)$ в заданной области было наименьшим. Функция $\varphi(x)$ при этом называется *аппроксимирующей*. Типичной задачей аппроксимации функций является задача *интерполяции*. Необходимость *интерполяции* функций в основном связана с двумя причинами:

1. Функция $f(x)$ имеет сложное аналитическое описание, вызывающее определенные трудности при его использовании (например, $f(x)$ является спецфункцией: гамма-функцией, эллиптической функцией и др.).

2. Аналитическое описание функции $f(x)$ неизвестно, т.е. $f(x)$ задана таблично. При этом необходимо иметь аналитическое описание приближенно представляющее $f(x)$ (например, для вычисления: значений $f(x)$ в произвольных точках, определения интегралов и производных от $f(x)$ и т. п.).

Интерполяция

Почти для всех численных методов характерно, что значение некоторой функции $f(x)$ задано в ряде отдельных значений x точек и не задано в промежутках между ними. Для вычислений эти промежутки заполняются обычно многочленом, совпадающим с $f(x)$ в тех точках, где заданы значения этой функции.

Простейшая задача *интерполяции* заключается в следующем. Для заданных $n + 1$ точек $x_i = x_0, x_1, \ldots, x_n$, которые называются *узлами интерполяции*, и значений в этих точках некоторой функции $f(x_i) = y_0, y_1, \ldots, y_n$ построить полином $\varphi(x)$ (*интерполяционный полином*) степени n вида

$$\varphi(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \qquad (1)$$

принимающий в узлах интерполяции x_i те же значения y_i, что и функция $f(x_i)$:

$$\varphi(x_0) = y_0,\ \varphi(x_1) = y_1,\ \ldots,\ \varphi(x_n) = y_n,\ i = 0, 1, \ldots, n. \qquad (2)$$

Линейная интерполяция. Самый простой случай – линейная интерполяция, когда берут только два соседних значения, а все промежуточные вычисляют, предполагая, что производная $f'(x)$ в рассматриваемом интервале постоянная. Такой способ дает достаточную точность лишь при условии, что $f''(x)$ мало меняется на интервале между заданными значениями.

Часто встречаются случаи, когда нужно обращать внимание на производные более высокого порядка. Приближение многочленами не может быть точным кроме того случая, когда сама функция $f(x)$ является многочленом. Но при подходящих условиях может давать необходимую точность.

Интерполяционная формула Лагранжа. Функция $f(x)$, заданная в точках $x = x_1, x_2, \ldots x_n$, интерполируется многочленом $n - 1$ степени:

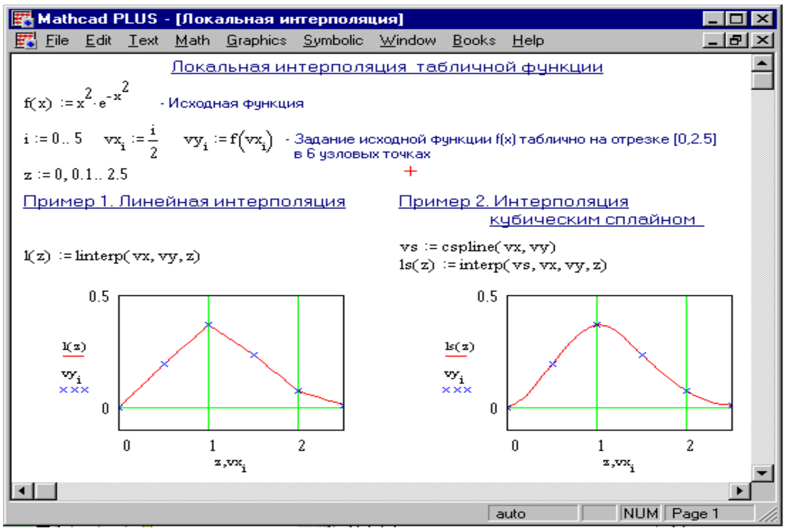
$$g(x) = f(x_1)\frac{(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_n)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\ldots(x_1 - x_n)} +$$

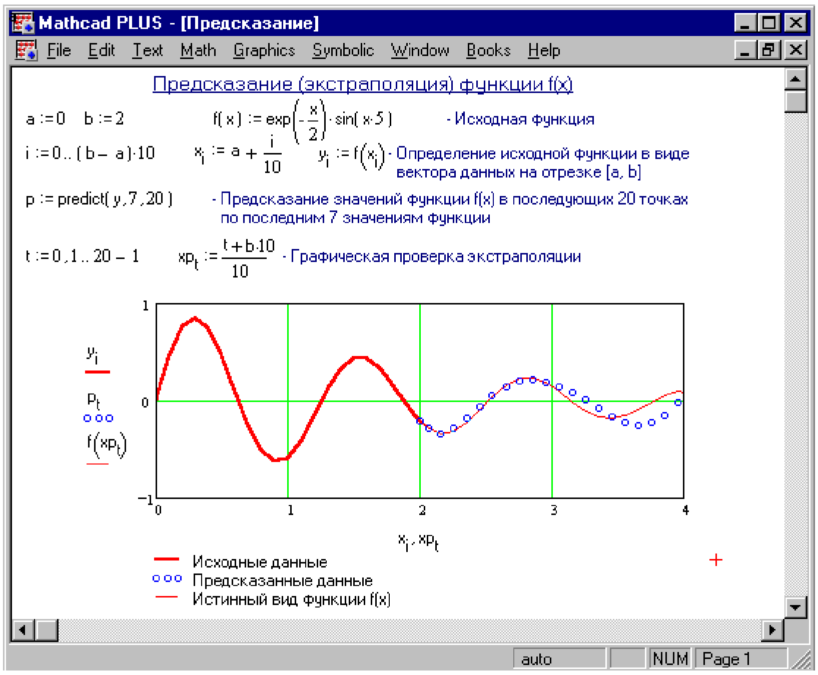
$$+ f(x_2)\frac{(x - x_1)(x - x_3)\ldots(x - x_n)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)\ldots(x_2 - x_n)} + \ldots$$

$$\ldots + f(x_n)\frac{(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})}{(x_n - x_1)\ldots(x_n - x_{n-1})}$$

Для построения *интерполяционной формулы Лагранжа* в Mathcad удобно использовать функцию *if*. *if(cond, tval, fval)* возвращает значение *tval*, если *cond* отличен от 0 (истина). Возвращает значение *fval*, если *cond* равен 0 (ложь).

Локальная интерполяция. При *локальной* интерполяции между различными узлами выбираются различные многочлены невысокой степени. В среде Mathcad есть для этого инструментарий: средства *линейной интерполяции* (функция *linterp*) и *интерполяции сплайном* (функция *interp*) – линейным (*lspline*), параболическим (*pspline*) и кубическим (*cspline*). Рис. 1 показывает некоторые примеры локальной интерполяции.





Тема 3. «Численное решение нелинейных уравнений»

Лабораторная работа №3.

Уравнением называют равенство функции другой функции или числу, например $F(x) = f(x)$ или $f(x) = 0$. Его решениями или корнями называют значения переменной x, при которых это равенство является верным.

Различают алгебраические и трансцендентные уравнения. В алгебраических уравнениях содержатся только алгебраические функции (рациональные или иррациональные), они могут быть приведены к каноническому виду, то есть к уравнению n-й степени. Трансцендентные уравнения содержат хотя бы одну неалгебраическую функцию (показательную, логарифмическую, тригонометрическую и др.).

Нахождение приближённых решений алгебраических и трансцендентных уравнений. Численное решение уравнений сводится к выполнению арифметических операций над коэффициентами уравнений и значениями входящих в него функций и позволяет найти решения уравнений с любой наперёд заданной точностью. К Ч. р. у. сводятся многие задачи математики и её приложений.

Численное решение алгебраических уравнений разбивается на следующие этапы:
1) выделение кратных корней, сводящее задачу к решению уравнения с простыми корнями;
2) определение границ, между которыми могут лежать корни уравнения;
3) разделение корней, т. е. указание промежутков, каждый из которых содержит не более одного простого корня;
4) грубое определение приближённого значения корня, выполняемое графически или каким-либо иным способом (например, при помощи изучения перемен знака левой части уравнения);
5) вычисление корня с заданной точностью.

Наиболее распространёнными методами для этого являются метод Ньютона, метод последовательных приближений метод, разложение в ряды и т.д.

При численном решении трансцендентных уравнений ограничиваются этапами 4 и 5.

Итерационные методы

Данное уравнение f(z)=0 приводят к виду z=φ(z). Выбирая некоторое начальное приближение $z^{[o]}$, вычисляют последовательные приближения $z^{[j+1]}=\varphi(z^{[j]})$ (j=0,1,2..).

Сходимость таких приближений к искомому решению z требует отдельного исследования. Итерации заканчивают тогда, когда отношение $\frac{|z^{[j]}-z^{[j-1]}|}{|z^{[j]}|}$, становится достаточно малым. Возможны различные способы приведения уравнения f(z)=0 к виду z=φ(z).

Метод Ньютона (также известный как метод касательных) – это итерационный численный метод нахождения корня (нуля) заданной функции. Метод был впервые предложен английским физиком, математиком и астрономом Исааком Ньютоном (1643 – 1727), под именем которого и обрёл свою известность. Поиск решения осуществляется путём построения последовательных приближений и основан на принципах простой итерации. Метод обладает квадратичной сходимостью. Улучшением метода является метод хорд и касательных.

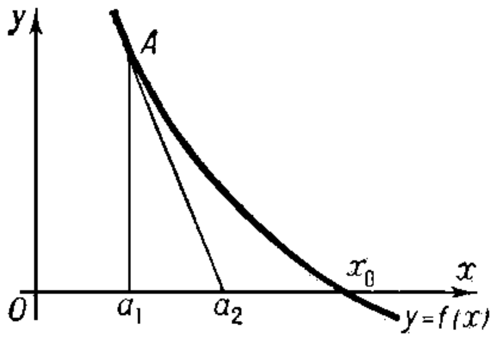


Рис. 1. Метод Ньютона решения уравнений.

Метод Ньютона состоит в том, что по исходному («первому») приближению $x = a_1$ находят второе (более точное), проводя касательную к графику (см. рис. 3) $y = f(x)$ в точке A $[a_1\ f(a_1)]$ до её пересечения с осью Ox; точка пересечения $x = a_1 - f(a_1)/f'(a_1)$ и принимается за новое значение a_2. корня. Повторяя в случае необходимости этот процесс, получают всё более и более точные приближения $a_2, a_3,...$ корня x_0 при условии, что производная $f'(x)$ монотонна и сохраняет знак на сегменте, содержащем x_0. Ошибка $\varepsilon_2 = x_0 - a_2$ нового значения a_2 связана со старой ошибкой $\varepsilon_1 = x_0 - a_1$ формулой $\varepsilon_2 = -\frac{f''(\xi)}{f'(a_1)}\varepsilon_1^2$ $f(x)$ в некоторой точке x, лежащей между x_0 и a_1.

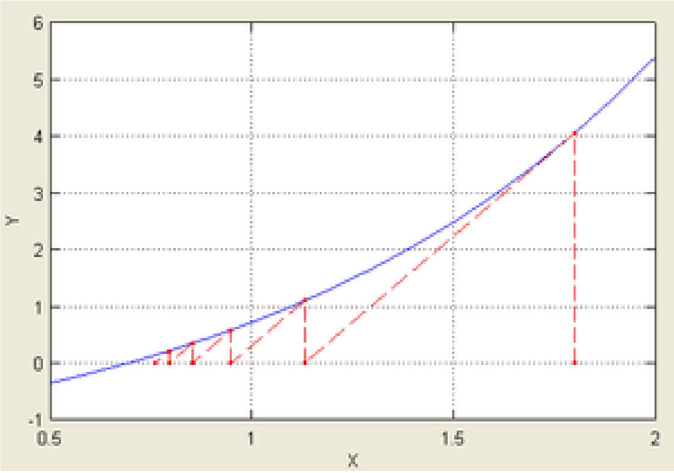


Рис. 2. Иллюстрация последовательных приближений метода одной касательной, применённого к функции $f(x) = e^x - 2$ с начальным приближением в точке $x_0 = 1{,}8$.

Метод одной касательной

В целях уменьшения числа обращений к значениям производной_функции применяют так называемый метод одной касательной.

Формула итераций этого метода имеет вид

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{f'(x_0)} f(x_n).$$

Суть метода заключается в том, чтобы вычислять производную лишь один раз, в точке начального приближения x_0, а затем использовать это значение на каждой последующей итерации:

$$\alpha(x) = \alpha_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}.$$

При таком выборе α_0 в точке x_0 выполнено равенство

$$\varphi'(x_0) = 1 + \alpha_0 f'(x_0) = 0,$$

и если отрезок, на котором предполагается наличие корня x^* и выбрано начальное приближение x_0, достаточно мал, а производная $\varphi'(x)$ непрерывна, то значение $\varphi'(x^*)$ будет не сильно отличаться от $\varphi'(x_0) = 0$ и, следовательно, график $y = \varphi(x)$ пройдёт почти горизонтально, пересекая прямую $y = x$, что в свою очередь обеспечит быструю сходимость последовательности точек приближений к корню.

Тема 4. «Решение систем уравнений»

Лабораторная работа №4.

Решение системы линейных алгебраических уравнений матричным методом. Заданная система уравнений может быть представлена в матричной форме :

$$A \cdot x = B,$$

где

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 21 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 8 & -1 \end{vmatrix}$$ - матрица коэффициентов системы;

$B=\begin{vmatrix} -30 \\ 7 \\ 2 \end{vmatrix}$ - вектор-столбец свободных членов системы.

Решение системы - вектор-столбец $x=\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix}$ получим из матричного уравнения: $x=A^{-1}\cdot B$.

Порядок выполнения:

Вызвать математическую панель инструментов Matrix (Матрицы).

Ввести элементы матриц A и B, используя знак присваивания

$A:=\begin{vmatrix} 3 & 21 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 8 & -1 \end{vmatrix}$ $\qquad B:=\begin{vmatrix} -30 \\ 7 \\ 2 \end{vmatrix}$

Набрать с клавиатуры матричное уравнение: $x:=A^{-1}\cdot B$. Ввести x=.

На экране появится вектор корней системы уравнений x_1, x_2, x_3: $x=\begin{vmatrix} 22.333 \\ -5 \\ 2.662 \end{vmatrix}$

Заметим, что без ввода ORIGIN:=1 в векторе x получим элементы со смещенными индексами: $x_0=22.333$, $x_1=-5$, $x_2=2.662$ (см. пример 5). При вводе ORIGIN:=1 получим решение заданной системы линейных алгебраических уравнений в соответствие с исходными обозначениями:

$$x_1=22.333; \quad x_2=-5; \quad x_3=2.662$$

<u>Проверка решения</u>**:** Набрать с клавиатуры $A\cdot x=$, получим: $A\cdot x=\begin{vmatrix} -30 \\ 7 \\ 2 \end{vmatrix}$.

Результат совпал с исходным вектором свободных членов *B*. Следовательно, система решена правильно.

Пример 8. Решение системы линейных алгебраических уравнений по формулам Крамера.

Для решения заданной системы по формулам Крамера, необходимо сформировать матрицы A, A1, A2, A3:

- A – матрица коэффициентов при неизвестных x_1, x_2, x_3;
- A1 – матрица, полученная заменой коэффициентов первого столбца матрицы A свободными членами;
- A2 – матрица, полученная заменой коэффициентов второго столбца матрицы A свободными членами;
- A3 –матрица, полученная заменой коэффициентов третьего столбца матрицы A свободными членами.

Для данной системы уравнений (если определитель $|A|\neq 0$) решение будет определяться формулами Крамера:

$x_1:=\dfrac{|A1|}{|A|}$ $\qquad x_2:=\dfrac{|A2|}{|A|}$ $\qquad x_3:=\dfrac{|A3|}{|A|}$

Порядок выполнения: сформировать матрицу a и скопировать её в трёх местах. Затем в скопированных матрицах последовательно заменить 1-й, 2-й и 3-й столбцы вектором свободных членов, получим матрицы a1, a2 и a3:

$$A:=\begin{vmatrix}3 & 21 & 3\\ 1 & 2 & -2\\ 2 & 8 & -1\end{vmatrix}\quad A1:=\begin{vmatrix}-30 & 21 & 3\\ 7 & 2 & -2\\ 2 & 8 & -1\end{vmatrix}\quad A2:=\begin{vmatrix}3 & -30 & 3\\ 1 & 7 & -2\\ 2 & 2 & -1\end{vmatrix}\quad A3:=\begin{vmatrix}3 & 21 & -30\\ 1 & 2 & 7\\ 2 & 8 & 2\end{vmatrix}$$

ДАЛЕЕ НАБРАТЬ С КЛАВИАТУРЫ $x_1=\dfrac{|A1|}{|A|}$ $x_2:=\dfrac{|A2|}{|A|}$ $x_3:=\dfrac{|A3|}{|A|}$, ЧТО И ДАСТ

решение: $x_1=22.333$ $x_2=-5$ $x_3=2.662$

Пример 9. Решение системы линейных алгебраических уравнений с использованием встроенной математической функции lsolve.

(Обратите внимание: встроенная математическая функция lsolve имеется только в Mathcad 2000 и в последующих версиях).

Для решения достаточно определить матрицу A и вектор B и набрать с клавиатуры x:=lsolve(A,B) и вывести результат: $x=\begin{vmatrix}22.333\\ -5\\ 2.662\end{vmatrix}$

Мы получили те же результаты, что и в примерах 7 и 8.

Задание. Решение систем линейных алгебраических уравнений

Варианты систем линейных алгебраических уравнений заданы в таблице. Требуется найти решение системы уравнений (корни x_1, x_2 и x_3) тремя методами: а) методом Крамера;

б) матричным методом;

в) с помощью встроенной функции **lsolve.**

Таблица

Последняя цифра шифра	Системы уравнений	Последняя цифра шифра	Системы уравнений
1	$\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3=5\\ 2x_1+3x_2+x_3=1\\ 2x_1+x_2+3x_3=11\end{cases}$	6	$\begin{cases}3x_1+4x_2+2x_3=8\\ 2x_1-x_2-3x_3=4\\ x_1+5x_2+x_3=0\end{cases}$
2	$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=6\\ 2x_1+3x_2-4x_3=20\\ 3x_1-2x_2-5x_3=6\end{cases}$	7	$\begin{cases}x_1+x_2-x_3=1\\ 8x_1+3x_2-6x_3=2\\ 4x_1+x_2-3x_3=3\end{cases}$

Тема 5. «Численное дифференцирование. Численное интегрирование»

Лабораторная работа №5.

Численное интегрирование. Формулы для приближенного вычисления определенных интегралов применяются очень часто. Дело в том, что для большого числа элементарных функций первообразные уже не выражаются через элементарные функции, в результате чего нельзя вычислить определенный интеграл с помощью формулы Ньютона-Лейбница.

Встречаются также и случаи, когда приходится прибегать к формулам приближенного интегрирования даже для таких интегралов, которые могут быть найдены в конечном виде, но такое выражение оказывается слишком сложным. Особенно важны формулы приближенного интегрирования при решении задач, содержащих функции, заданные таблично.

Квадратурные формулы

Наиболее распространенным подходом к численному вычислению интеграла

$$I = \int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

является разбиение отрезка $[a, b]$ на n равных частей $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ с шагом $h = \frac{b-a}{n}$, интерполирование функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ (получение интерполяционного многочлена $\varphi(x)$) и замена в (1) интеграла интегральной суммой:

$$I_n = \int_a^b \varphi(x)dx = \sum_{i=0}^{n} A_i \cdot y_i, \quad I_n \approx I. \qquad (2)$$

Соотношения вида (2) называют *квадратурными формулами*.

В простейших случаях в качестве интерполяционного многочлена $\varphi(x)$ берут ступенчатую, кусочно-линейную или кусочно-параболическую функции, а также полином степени $k = n$ для которых квадратурные формулы принимают вид (см. Рис. 3):

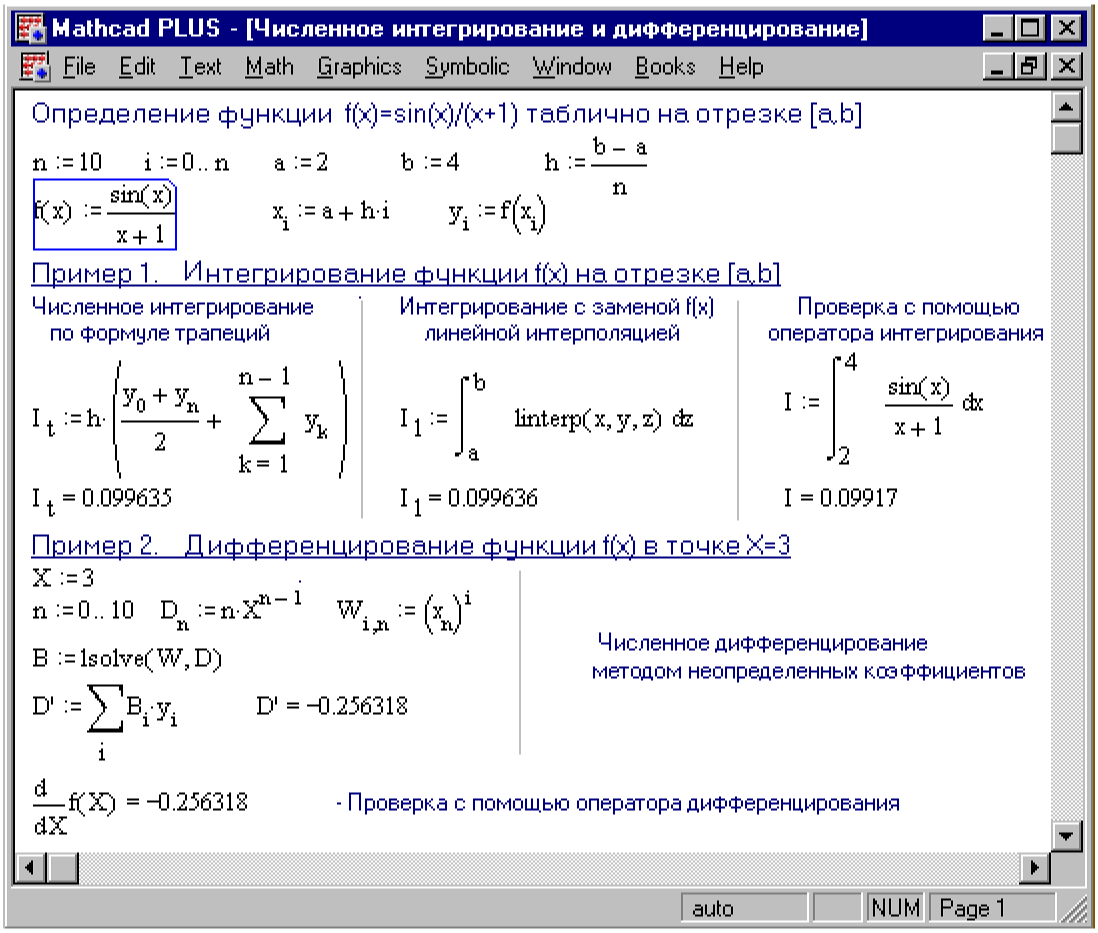


Рис. 3. Численное интегрирование и дифференцирование

формула прямоугольников:

$$I_n = h\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1/2}), \quad x_{i-1/2} = x_{i-1} + \frac{1}{2}h, \quad i = 1, 2, \ldots, n; \qquad (3)$$

формула трапеций:

$$I_n = h \cdot \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right) \quad (4)$$
;

формула Симпсона (n - четное число):

$$I_n = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2}) + y_n\right) \quad (5)$$
;

Метод Монте-Карло

Во многих задачах исходные данные носят случайный характер, поэтому для их решения должен применяться статистико-вероятностный подход. На основе такого подхода и построен метод статистических испытаний, называемый также методом *Монте-Карло*.

Пусть η – равномерно распределенная на отрезке [*a, b*] случайная величина, :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n} f(\eta_i) \quad (7)$$
.

Для генерирования последовательности случайных чисел с нормальным законом распределения в Mathcad возможно использовать функцию *rnd.*

rnd(x) возвращает равномерно распределенное случайное число между 0 и x. Для реализации метода Монте-Карло удобно использовать функцию *mean.* mean**(***A***)** Возвращает среднее арифметическое значение элементов массива *A*.

Тема 6. «Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений»

Лабораторная работа №6.

Решить дифференциальное уравнение $dy/dx = x^2$ при $y|_{x=0} = 1$. Определить значение функции при $x_k = 1$, $h = 1$.

1. *Аналитическое решение.*

$dy/dx = x^2$

$$\int_1^y dy = \int_0^x x^2 dx$$

$y=1+x^3/3$,

$y_k=y(1)=1+1/3=4/3$.

2.Метод Эйлера.

$$y_1 = y_k = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) =$$

$$= \begin{Bmatrix} y_0 = 1 \\ h = 1 \\ f(x_0, y_0) = x_0^2 = 0 \end{Bmatrix} = 1 + 0 = 1$$

Модифицированный метод Эйлера 1.

$$Y_1 = y_0 + k_2 = \begin{cases} y_0 = 1 \\ k_1 = hf(x_0, y_0 = 1*0 = 0) \\ k_2 = h*f(x + h/2, y_0 + k_1/2) = 1 \end{cases} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

Модифицированный метод Эйлера 2.

$$Y_1 = y_0 + (k_1 + k_2)/2 =$$

$$= \begin{cases} k_1 = 0 \\ k_2 = h \cdot f(x_0 + h, y_0 + k_1) = 1 \cdot f(1,1) = 1 \end{cases} =$$

$$= 1 + (0+1)/2 = \frac{3}{2}$$

Метод Рунге-Кутта четвертого порядка.

$$Y_1 = y_0 + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6 =$$

$$= \begin{cases} y_0 = 1 \\ k_1 = 0 \\ k_2 = hf(x_0 + h/2, y_0 + k_1/2) = \frac{1}{4} \\ k_3 = hf(x_0 + h/2, y_0 + k_2/2) = \frac{1}{4} \\ k_4 = hf(x_0 + h, y_0 + k_3) = 1 \end{cases} =$$

$$= 1 + \frac{0 + 2\frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} + 1}{6} = \frac{4}{3}$$

Многошаговые методы

В *многошаговых методах* для отыскивания следующей точки кривой *y* = *f(x)* требуется информация *более чем об одной* из предыдущих точек.

Пусть найдены значения $y_{i-3}, y_{i-2}, y_{i-1}, y_i$ в четырех последовательных точках. При этом имеются также вычисленные ранее значения правой части уравнения (1) $f_{i-3}, f_{i-2}, f_{i-1}, f_i$. Тогда схему *метода Адамса* можно представить в виде:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f_i + \frac{h}{2} \cdot \Delta f_i + \frac{5 \cdot h}{12} \cdot \Delta^2 f_i + \frac{3 \cdot h}{8} \cdot \Delta^3 f_i, \quad i = 3, 4, ..., n - 1. \qquad (4)$$

где конечные разности в точке x_i имеют вид:

$$\begin{aligned} \Delta f_i &= f_i - f_{i-1}, \\ \Delta^2 f_i &= f_i - 2 f_{i-1} + f_{i-2}, \\ \Delta^3 f_i &= f_i - 3 f_{i-1} + 3 f_{i-2} - f_{i-3}. \end{aligned} \qquad (5)$$

Решение задачи Коши средствами Mathcad

Инструментарий для решения ОДУ (систем ОДУ) различного порядка в Mathcad представлен широким спектром встроенных функций, например, *rkfixed* – метод Рунге-Кутта (*rk*) четвертого порядка с фиксированным (*fixed*) шагом интегрирования.

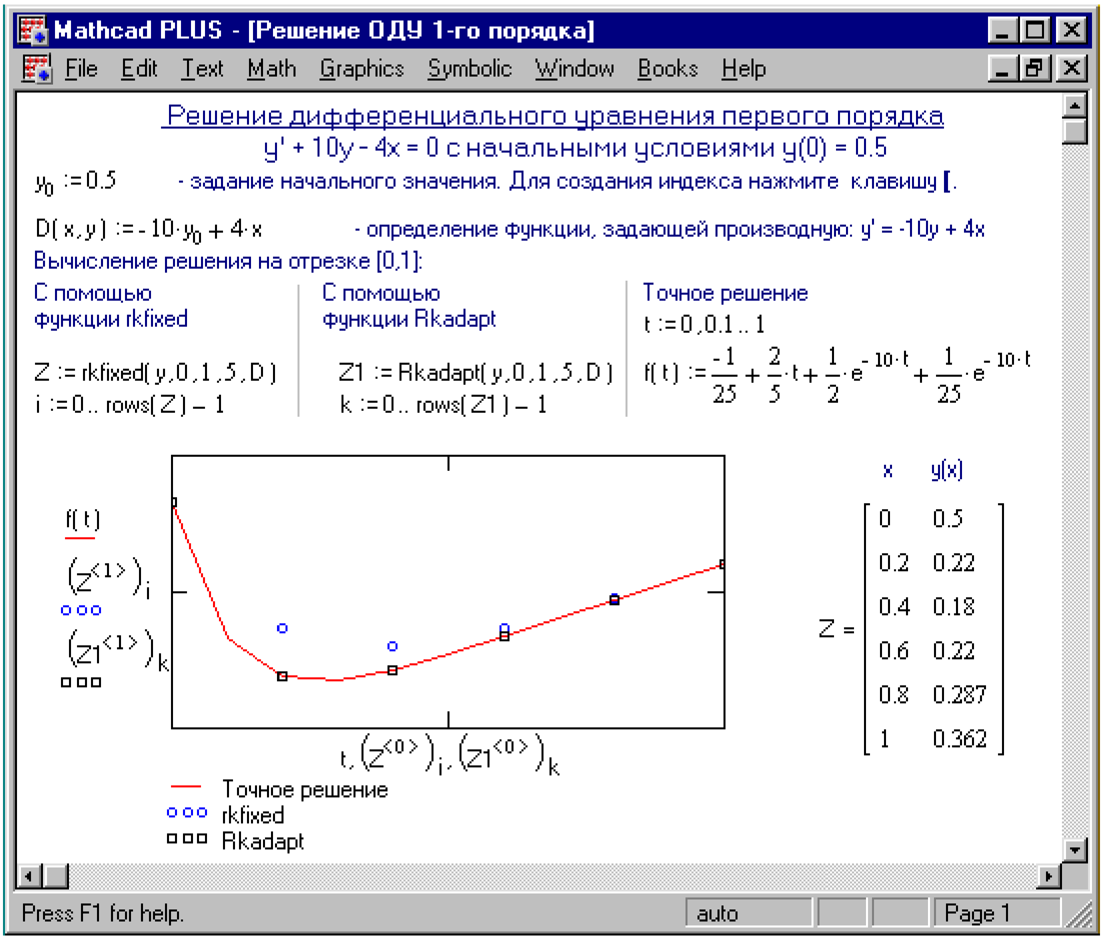


Рис. 4. Решение ОДУ 1-го порядка

rkfixed(y, a, b, n, D) возвращает матрицу с $p + 1$ столбцами и $n + 1$ строками (p - количество уравнений или порядок уравнения, n - число шагов на интервале [a, b]) - таблицу решений системы: первый столбец – это значения аргумента x, а последующие столбцы - значения ординат решения. y – вектор начальных условий размерности n. $D(x, y)$ – функция-вектор из n элементов, содержащая первые производные неизвестных функций.

Можно решить задачу более точно (более быстро), если уменьшить шаг h там, где производная меняется быстро, и увеличить шаг там, где она ведет себя более спокойно. Для этого предусмотрена функция *Rkadapt* (*adaption* – адаптация). Аргументы и матрица, возвращаемая функцией *Rkadapt*, такие же, как при *rkfixed.*

Тема 7. «Численные методы решения краевой задачи и задач на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений»

Лабораторная работа №7.

Краевые задачи

Краевая задача формулируется следующим образом: пусть на отрезке [a, b] требуется найти решение дифференциального уравнения (для простоты изложение будем вести на примере ОДУ второго порядка):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y') \qquad (6)$$

, при граничных условиях *y(a) = A, y(b) = B*.

В этом случае Mathcad предлагает использовать функцию *sbval*, чтобы найти недостающие начальные условия в точке *a*.

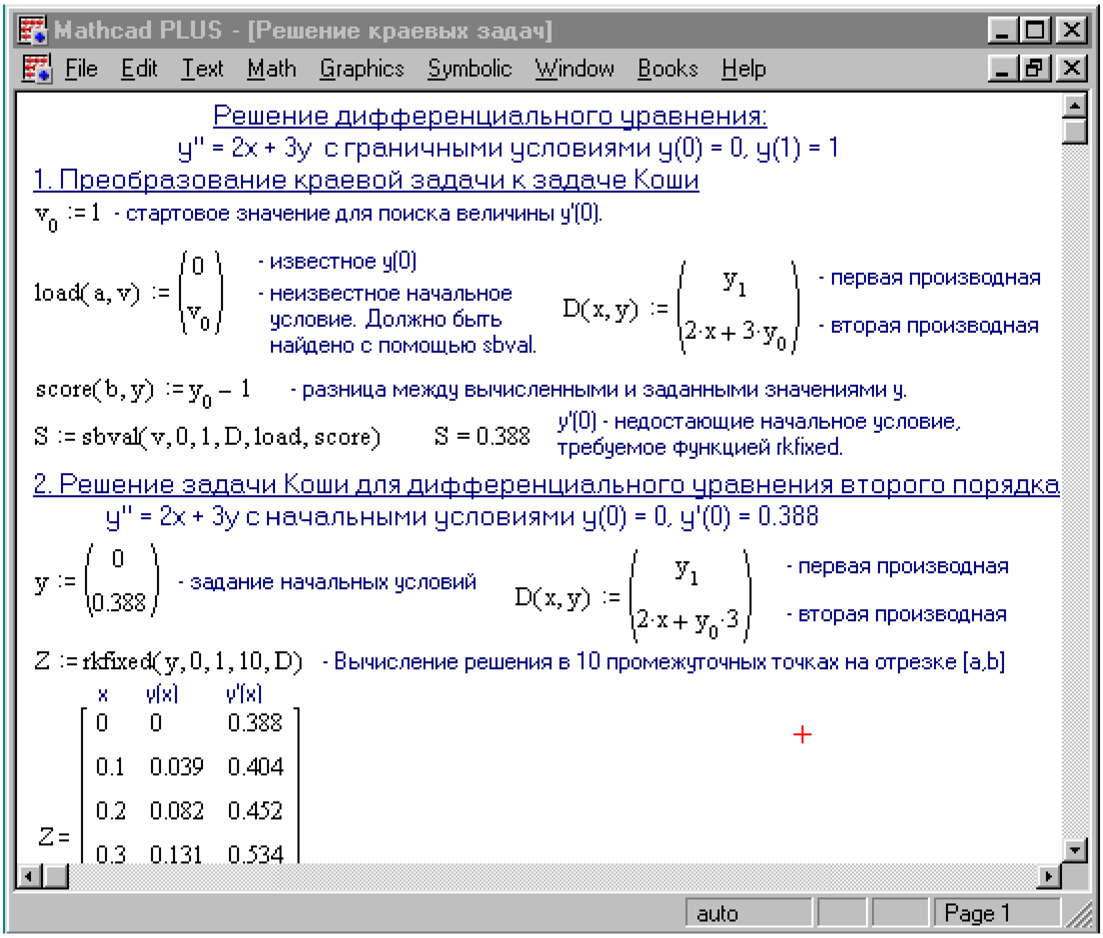


Рис. 5. Решение краевой задачи

Sbval(*v, a, b , D, load , score*) Возвращает вектор, содержащий недостающие начальные условия в точке *a*. Вектор *v* задает начальные приближения, *a, b* – граничные точки интервала решений, *D*(*x, y*) – функция-вектор с первыми производными неизвестных функций. *load*(*a, v*) – функция-вектор, возвращающая значение начальных условий в точке *a*. *score*(*b, y*) – функция-вектор, каждый элемент которого содержит разность между начальным условием заданным в точке *b*, и значением искомого решения в этой точке.

После того, как эти недостающие начальные условия будут получены, можно решать обычную задачу с начальными условиями – *задачу Коши*, используя любую из функций, описанных выше. Пример решения краевой задачи показан на рис. 5.

Тема 8. «Математическое моделирование»

Лабораторная работа №8.

Рассмотрим несколько типичных задач по физике, иллюстрирующих разнообразие математических средств системы Mathcad.

Задача 1. Одно тело свободно падает с высоты h1; одновременно с ним дру-гое тело начинает движение с большей высоты h2. Какой должна быть начальная скорость v0 второго тела, чтобы оба тела упали одновременно?
Для решения задачи в Mathcad используются специальные функции для символьного преобразования: solve, substitute, simplify, которые дают результат решения задачи в аналитическом виде. В итоге, мы получаем конечную формулу, представленную на рис.

Законы движения тел в системе координат, где ось OX направлена вертикально вверх, а точка O находится на земле, имеют вид

$$x1(t) = h1 - \frac{g \cdot t^2}{2} \qquad (1)$$
$$x2(t) = h2 - \frac{g \cdot t^2}{2} - v0 \cdot t$$

Из условия задачи следует, что x1(t) = 0 ,
поэтому приравниваем уравнение к нулю и выражаем t

$$h1 - \frac{g \cdot t^2}{2} = 0 \text{ solve}, t \rightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{h1}}{\sqrt{g}} \\ -\dfrac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{h1}}{\sqrt{g}} \end{pmatrix} & \text{if } g \neq 0 \\ 0 & \text{if } g = 0 \wedge h1 = 0 \end{cases}$$

из предложенных вариантов, выбираем перый, т.к. он подходит по физическому смыслу задачи, т.е.

$$t = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{h1}}{\sqrt{g}} \qquad (2)$$

из условия задачи x2(t) = 0, значит

$$h2 - \frac{g \cdot t^2}{2} - v0 \cdot t = 0 \qquad (3)$$

подставляем (2) в (3) командой substitute

$$h2 - \frac{g \cdot t^2}{2} - v0 \cdot t = 0 \text{ substitute}, t = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{h1}}{\sqrt{g}} \rightarrow -\frac{\sqrt{g} \cdot h1 - \sqrt{g} \cdot h2 + \sqrt{2} \cdot \sqrt{h1} \cdot v0}{\sqrt{g}} = 0$$

упрощаем полученное выражение командой simplify

$$-\frac{\sqrt{g} \cdot h1 - \sqrt{g} \cdot h2 + \sqrt{2} \cdot \sqrt{h1} \cdot v0}{\sqrt{g}} = 0 \text{ simplify} \rightarrow h2 - h1 - \frac{v0 \cdot \sqrt{2 \cdot h1}}{\sqrt{g}} = 0$$

выражаем v0 командой solve

$$h2 - h1 - \frac{v0 \cdot \sqrt{2 \cdot h1}}{\sqrt{g}} = 0 \text{ solve}, v0 \rightarrow -\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{g} \cdot (h1 - h2)}{2 \cdot \sqrt{h1}}$$

Тема 9. «Обработка экспериментальных данных»

Лабораторная работа №9.

Метод наименьших квадратов состоит в следующем: для данных значений $x = x_0, x_1, \ldots, x_n$ и $y = y_0, y_1, \ldots, y_n$ подобрать многочлен заданной степени $m<n$ вида

$$\varphi(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \qquad (1)$$

принимающий в заданных точках x_i значения как можно более близкие к табличным значениям y_i. Коэффициенты a_i многочлена (1) находят из решения системы уравнений:

$$\begin{cases} b_{00}a_0 + b_{01}a_1 + \ldots + b_{0m}a_m = c_0, \\ b_{10}a_0 + b_{11}a_1 + \ldots + b_{1m}a_m = c_1, \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ b_{m0}a_0 + b_{m1}a_1 + \ldots + b_{mm}a_m = c_m. \end{cases}$$ (2)

(3)

где $b_{k,l} = \sum_{i=0}^{n} x_i^{k+l}, \; c_k = \sum_{i=0}^{n} x_i^k y_i, \quad k, l = 0, 1, \ldots, m$.

Регрессионный анализ

Пусть имеются два ряда чисел $x = x_0, x_1, \ldots, x_n$ и $y = y_0, y_1, \ldots, y_n$, при этом предполагается, что ряд *y* каким-либо образом зависит от ряда *x*. *Задача регрессионного анализа* состоит в восстановлении математической зависимости (*регрессии*) $y(x)$ по результатам измерений (x_i, y_i), $i = 0, 1, \ldots, n$.

Mathcad включает ряд функций для вычисления регрессии. Функции отличаются прежде всего типом кривой, которую они используют, чтобы аппроксимировать данные.

Линейная регрессия

Встроенные функции *intercept* (to intercept - отложить отрезок на линии) и *slope* (наклон) решают самую простую и распространенную задачу *линейной регрессии* экспериментальных данных:

f(*x*) = *slope*(*vx*, *vy*) *x* + *intercept*(*vx*, *vy*)

slope**(***vx, vy***)** Возвращает скаляр: наклон линии для данных из*vx* и *vy*.

intercept**(***vx, vy***)** Возвращает скаляр: смещение по оси ординат линии регрессии для данных из *vx* и *vy*.

Полиномиальная регрессия

Используйте функцию *regress*, когда нужно получить единственный полином произвольной степени, чтобы приблизить все данные. Не рекомендуется делать степень аппроксимирующего полинома выше 4 - 6, поскольку погрешности реализации регрессии сильно возрастают.

regress**(***vx, vy, n***)** Возвращает вектор *vs*, требуемый *interp*, чтобы найти полином порядка *n*, который наилучшим образом приближает данные из *vx* и *vy*.

Пример 1 Рис. 6 иллюстрирует использование функции *regress*. Так как *regress* приближает все точки данных, используя один полином, это не дает хороший результат, когда данные не связаны единой полиномиальной зависимостью.

Функция *loess* облегчает эти проблемы, выполняя локальное приближение. Вместо одного полинома *loess* создает различные полиномы второго порядка в зависимости от расположения на кривой.

*loess***(***vx, vy, span***)** Возвращает вектор *vs*, требуемый *interp*, чтобы найти набор полиномов второго порядка, которые наилучшим образом приближают определенные окрестности выборочных точек, определенных в векторах *vx* и *vy*. Аргумент *span*> 0 определяет, насколько большие окрестности *loess* будет использовать при выполнении локального приближения.

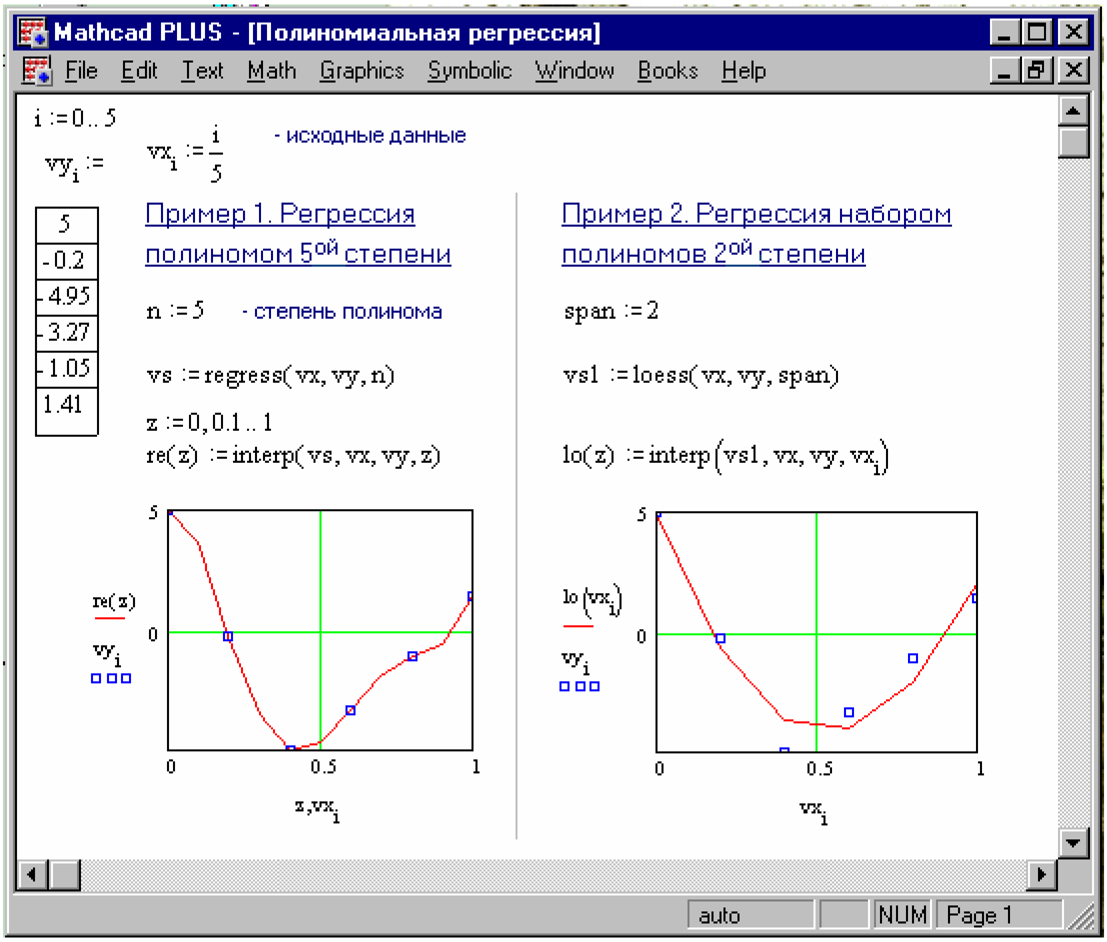


Рис. 6. Полиномиальная регрессия.

Обобщенная регрессия

Линейная или полиномиальная регрессия не во всех случаях подходят для описания зависимости данных. Бывает, что нужно искать эту зависимость в виде линейных комбинаций произвольных функций, ни одна из которых не является полиномом. Если предполагается, что данные могли бы быть смоделированы в виде линейной комбинации произвольных функций

$f(x) = a_0 f_0(x) + a_1 f_1(x) + \ldots + a_n f_n(x)$,

следует использовать *linfit*, чтобы вычислить a_i. Это так называемая *линейная регрессия общего вида*.

Вопросы зачета по численным методам и математическому моделированию

1. Вычисление значений простейших функций: иррациональных, тригонометрических.

2. Вычисление значений простейших функций: показательных и логарифмических.

3. Понятие об интерполяции функций. Интерполяционная формула Лагранжа.

4. Интерполяционные полиномы. Сплайн интерполяция.

5. Численные методы решения уравнений: половинного деления, секущих и хорд.

6. Численные методы решения уравнений: метод касательных (Ньютона), итераций.

7. Численное дифференцирование функций.

8. Численное интегрирование: формулы прямоугольников, трапеций, Симпсона.

9. Многомерные интегралы. Методы Монте-Карло.

10. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Задача Коши.

11. Численное интегрирование уравнений второго и высших порядков, как систем уравнений первого порядка.

12. Математическое моделирование: основные понятия.

13. Математическое моделирование динамики тела, брошенного под углом к горизонту.

14. Математическое моделирование затухающих колебаний осциллятора.

15. Применение метода наименьших квадратов для определения коэффициентов линейной регрессии.

Таблица 9

Примеры оценочных средств с ключами правильных ответов

№ п/п	Тип задания	Формулировка задания	Правильный ответ	Время выполнения (в минутах)
ОПК -5: переработка информации и навыки работы с компьютером как со средством управления информацией				
1.	Задание закрытого типа	Что такое метод сеток? 1. Решение дифференциальных уравнений в частных производных. 2. Решение интегральных уравнений. 3. Правая конечная разность. 4. Фукция двух переменных.	1	1
2.		Для решения уравнения Пуассона с помощью пакета MathCAD предназначена функция: 1. relax(a, b, c, d, e, f, u, rjac). 2. f . 3. u. 4. rjac.	1	1
3.		Для создания условных выражений используют функцию: 1.ceil(x) 2. floor(x) 3. mod(x,y) 4. if	4	1
4.		Что позволяет решать функция rkfixed: 1. Стандартные математические задачи. 2. Линейные уравнения. 3. Матрицы. 4. Обыкновенные дифференциальные уравнения численным методом Рунге-Кутта	4	1
5.		Оператор, который служит для организации циклов с заданным числом повторений:	1	1

№ п/п	Тип задания	Формулировка задания	Правильный ответ	Время выполнения (в минутах)
		1. for 2. while 3. return 4. error		
6.	Задание открытого типа	Что такое эффе́кт Ко́ндо ?	Эффект увеличения электрического сопротивления слаболегированных магнитными примесями немагнитных металлических сплавов при температурах, близких к абсолютному нулю. Назван в честь японского физика Дзюна Кондо (англ. *Jun Kondo*), давшего явлению теоретическое обоснование. Соответствующую температурную и энергетическую шкалу называют *температурой Кондо*.	3
7.		Что такое конденса́т Бо́зе — Эйнште́йна?	Конденса́т Бо́зе — Эйнште́йна (бо́зе-эйнште́йновский конденса́т, бо́зе-конденса́т) — агрегатное состояние вещества, основу которого составляют бозоны, охлаждённые до температур, близких к абсолютному нулю (меньше миллионной доли кельвина). В таком сильно охлаждённом состоянии достаточно большое число атомов оказывается в своих минимально возможных квантовых состояниях, и квантовые эффекты начинают проявляться на макроскопическом уровне.	5
8.		В чем состоит отличие Mathcad от других аналогичных систем?	Основное отличие Mathcad от аналогичных программ -- это графический, а не текстовый режим ввода выражений. Для набора команд, функций, формул можно использовать как клавиатуру, так и кнопки на многочисленных специальных панелях	5

№ п/п	Тип задания	Формулировка задания	Правильный ответ	Время выполнения (в минутах)
			инструментов. В любом случае -- формулы будут иметь привычный, аналогичный книжному, вид. То есть особой подготовки для набора формул не нужно. Вычисления с введенными формулами осуществляются по желанию пользователя или мгновенно, одновременно с набором, либо по команде. Обычные формулы вычисляются слева направо и сверху вниз (подобно чтению текста). Любые переменные, формулы, параметры можно изменять, наблюдая воочию соответствующие изменения результата.	
9.		Что называется идентификатором в системе Mathcad и каковы правила его формирования?	Имена констант, переменных и иных объектов называют идентификаторами. Тип переменной определяется ее значением; переменные могут быть числовыми, строковыми, символьными и т. д. Идентификаторы в системе **MathCAD** могут иметь практически любую длину, и в них могут входить любые латинские и греческие буквы, а также цифры.	5
10.		Как построить двухмерный график в декартовой системе координат	MathCAD позволяет легко строить двух- и трехмерные гистограммы, двухмерные графики в декартовых и полярных координатах, трехмерные графики поверхностей, линии уровня поверхностей, изображения векторных полей, пространственные кривые. При выполнении команды Inset -> Graph -> Plot в документ помещается рамка-шаблон с двумя незаполненными ячейками для построения графика.	5

7.4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

*Устный зачет п*роводится преподавателем по вопросам, которые составляются с учетом пройденного материала. Студент, имеющий все оценки за лабораторные работы на практических занятиях, имеет возможность на получение оценки за итоговый зачет равной накопленной без непосредственной сдачи. При желании получить более высокую итоговую оценку студент приступает к сдаче экзамена; ему предлагается для ответа один вопрос.

В конце изучения дисциплины подводятся итоги работы студентов на и практических занятиях путем суммирования заработанных баллов в течение семестра.

Критерии оценивания знаний студентов по дисциплине

№ п/п	Вид деятельности	Максимальное количество баллов на занятии	Максимальное количество баллов по дисциплине
1.	Лабораторная работа	5	45
2.	Зачет	55	55

Таблица 10

Технологическая карта рейтинговых баллов по дисциплине (модулю)

№ п/п	Контролируемые мероприятия	Количество мероприятий / баллы	Максимальное количество баллов	Срок представления
Основной блок				
•	*Ответ на занятии*		20	
•	*Выполнение практического задания*		20	
•	…			
Всего			**40**	-
Блок бонусов				
•	*Посещение занятий*		5	
•	*Своевременное выполнение всех заданий*		5	
•	…			
Всего			**10**	-
Дополнительный блок**				
•	*Зачет*		50	
Всего			**50**	-
ИТОГО			**100**	-

Таблица 11

Система штрафов (для одного занятия)

Показатель	Балл
Опоздание на занятие	-…1
Нарушение учебной дисциплины	-…1
Неготовность к занятию	-…1
Пропуск занятия без уважительной причины	-…1
…	-…1

Таблица 12

Шкала перевода рейтинговых баллов в итоговую оценку за семестр по дисциплине (модулю)

Сумма баллов	Оценка по 4-балльной шкале
90–100	5 (отлично)
85–89	4 (хорошо)
75–84	
70–74	
65–69	3 (удовлетворительно)
60–64	
Ниже 60	2 (неудовлетворительно)

Преподаватель, реализующий дисциплину (модуль), в зависимости от уровня подготовленности обучающихся может использовать иные формы, методы контроля и оценочные средства, исходя из конкретной ситуации.

8. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

8.1. Основная литература:

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы.– М.: СПб.: Физматлит, 2000.- 236 с.
2. Волков Е.А. Численные методы: Учеб.пособие для вузов.– М.: Наука, 1987.- 152 с.
3. Киреев В.И., Пантелеев А.В. Численные методы в примерах и задачах: Учеб.пособие.– Высш.шк., 2004.- 125 с.
4. Ращиков В.И., Рошаль А.С. Численные методы решения физических задач: Учебное пособие.– СПб.: Издательство «Лань», 2005.– 208 с.
5. Тарасевич Ю.Ю. Информационные технологии в математике.– М.: СОЛОН-пресс, 2003.– 144 с.
6. Казанцева А.Б., Механика. Задачи и решения / А. Б. Казанцева - М.: КолосС, 2013. - 319 с. (Учебники и учеб. пособия для высших учебных заведений) - ISBN 5-9532-0317-9 - URL: http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN5953203179.html.

8.2. Дополнительная литература:

1. Макаров Е.Г. Инженерные расчеты в Mathcad. Учебный курс.– СПб.: Питер, 2003.– 448 с.
2. Ортега Дж., Пул У. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений.– М.: Наука, 1986. - 132 с.
3. Турчак Л.И. Основы численных методов.– М.: Наука, 1987. - 152 с.
4. Формалев В.Ф., Ревизников Д.Л. Численные методы.– М.: Физматлит, 2004. - 165 с.

8.3. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимый для освоения дисциплины (модуля)

Электронно-библиотечная система (ЭБС) ООО «Политехресурс» «Консультант студента»
Многопрофильный образовательный ресурс «Консультант студента» является электронной библиотечной системой, предоставляющей доступ через Интернет к учебной литературе и дополнительным материалам, приобретённым на основании прямых договоров с правообладателями. Каталог содержит более 15 000 наименований изданий.
www.studentlibrary.ru *Регистрация с компьютеров АГУ*

9. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Аудитория, оснащенная компьютерами с установленными пакетами Mathcad.

Рабочая программа дисциплины (модуля) при необходимости может быть адаптирована для обучения (в том числе с применением дистанционных образовательных технологий) лиц с ограниченными возможностями здоровья, инвалидов. Для этого требуется заявление обучающихся, являющихся лицами с ограниченными возможностями здоровья, инвалидами, или их законных представителей и рекомендации психолого-медико-педагогической комиссии. Для инвалидов содержание рабочей программы дисциплины (модуля) может определяться также в соответствии с индивидуальной программой реабилитации инвалида (при наличии).