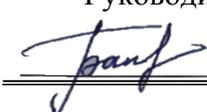


МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
АСТРАХАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

СОГЛАСОВАНО  
Руководитель ОПОП  
  
\_\_\_\_\_ Е.О. Вострикова  
«\_03\_» \_\_\_\_\_ 06 \_\_\_\_\_ 2021 г.

УТВЕРЖДАЮ  
Заведующий кафедрой МиМП  
\_\_\_\_\_ И.А. Байгушева  
«\_03\_» \_\_\_\_\_ 06 \_\_\_\_\_ 2021 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**  
**ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА**

Составитель(-и)	<b>Ахунжанова Н.А., канд. пед. наук, доцент, доцент кафедры математики и методики ее преподавания</b>
Направление подготовки / специальность	<b>38.03.01 Экономика</b>
Направленность (профиль) ОПОП	
Квалификация (степень)	<b>бакалавр</b>
Форма обучения	<b>очно-заочная</b>
Год приема	<b>2021</b>
Курс	<b>1</b>

Астрахань – 2021 г.

## 1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

1.1. Целью освоения дисциплины (модуля) «Линейная алгебра» является формирование у будущих специалистов базовых математических знаний для решения задач в профессиональной деятельности, умений аналитического мышления и математического формулирования экономических задач.

1.2. Задачи освоения дисциплины (модуля): познакомить студентов с основными понятиями и методами линейной алгебры, подготовить к изучению других дисциплин.

## 2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП

2.1. Учебная дисциплина (модуль) «Линейная алгебра» относится к базовой части учебного плана Б1.Б..08 и изучается в 1 и 2 семестрах.

2.2. Для изучения данной учебной дисциплины (модуля) необходимы знания, умения и навыки, формируемые дисциплинами математической подготовки в средней общеобразовательной школе.

2.3. Перечень последующих учебных дисциплин, для которых необходимы знания, умения и навыки, формируемые данной учебной дисциплиной:

- Математический анализ;
- Теория вероятностей;
- математическая статистика;
- Статистика;
- Эконометрика;
- Практикум по математическому анализу;
- практикум по математической статистике;
- Практикум по теории вероятности и математической статистике;
- Финансы.

## 3. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование элементов следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО и ОПОП ВО по данному направлению подготовки (специальности):

- способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач (УК-1);
- способностью осуществлять сбор, обработку и статистический анализ данных, необходимых для решения поставленных экономических задач (ОПК-2).

**Таблица 1. Декомпозиция результатов обучения**

Код компетенции	Планируемые результаты освоения дисциплины		
	Знать (1)	Уметь (2)	Владеть (3)
УК-1	<i>ИУК-1.1.1</i> основные методы критического анализа и основы системного подхода как общенаучного метода	<i>ИУК-1.2.1</i> анализировать задачу, используя основы критического анализа и системного подхода	<i>ИУК-1.3.1</i> осуществлять поиск необходимой для решения поставленной задачи информации, критически оценивая надежность различных источников информации
ОПК-2	теоретические основы математики, необходимые	Применять математические знания при сборе, анализе,	навыками использования математических знаний и

	для поиска и систематизации информации об экономических процессах и явлениях	группировке, классификации и обработке данных, необходимых для решения поставленных экономических задач	умений при сборе, анализе и обработке данных, необходимых для решения поставленных экономических задач
--	--	---	--

#### 4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Объем дисциплины «Алгебра и геометрия» в зачетных единицах (8 зачетных единиц (4, 4)) 288 часа. Лекции — 36 часов, практические занятия 36 — часов, самостоятельная работа обучающихся составляет 216 часов.

Таблица 2.

Структура и содержание дисциплины (модуля)

№ п/п	Наименование раздела (темы)	Семестр	Неделя семестра	Контактная работа (в часах)			Самостоятельная работа		Формы текущего контроля успеваемости (по неделям семестра) Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
				Л	ПЗ	ЛР	КР	СР	
1	Системы линейных уравнений и их решение методом Жордана—Гаусса.	1	1-6	6	6			36	Контрольная работа
2	Исследование системы линейных уравнений.	1	7-12	6	6			36	Контрольная работа
3	Матрицы и определители.	1	13-18	6	6			36	Контрольная работа
	<b>ИТОГО</b>			18	18			<b>108</b>	<b>ЭКЗАМЕН</b>
4	Векторные пространства.	2	1-6	6	6			36	Контрольная работа
5	Линейные операторы.	2	7-12	6	6			36	Контрольная работа
6	Квадратичные формы.	2	13-18	6	6			36	Контрольная работа

			1 8					
<b>ИТОГО</b>			18	18			108	<b>ЭКЗАМЕН</b>

Условные обозначения:

Л – занятия лекционного типа; ПЗ – практические занятия, ЛР – лабораторные работы;  
ГК – групповые консультации; ИК – индивидуальные консультации и иные учебные занятия, предусматривающие индивидуальную работу преподавателя с обучающимся;  
АИ – аттестационные испытания промежуточной аттестации обучающихся

## СОДЕРЖАНИЕ КУРСА

### **Тема 1. Системы линейных уравнений и их решение методом Жордана—Гаусса.**

Системы линейных уравнений. Частное и общее решение системы. Совместные и несовместные системы. Основная матрица системы. Матричная запись системы линейных уравнений. Ступенчатые матрицы. Равносильные системы уравнений. Элементарные преобразования матрицы. Приведение матрицы к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований. Расширенная матрицы системы. Решение системы линейных уравнений методом Гаусса, методом Гаусса-Жордана. Различные случаи решения систем, количество решений.

### **Тема 2. Исследование системы линейных уравнений.**

Ранг матрицы. Критерий совместности системы линейных уравнений. Свойства решений системы линейных уравнений. Фундаментальный набор решений однородной системы линейных уравнений и способ ее построения.

### **Тема 3. Матрицы и определители.**

Операции над матрицами и их свойства. Обратимые матрицы. Условия обратимости матрицы. Вычисление обратной матрицы. Матричные уравнения.

Определители 2-го и 3-го порядков. Определитель квадратной матрицы n-го порядка. Основные свойства определителей.

Миноры и алгебраические дополнения. Разложение определителя по строке или столбцу.

Необходимое и достаточное условие невырожденности матрицы.. Определитель произведения матриц.

Теорема о ранге матрицы. Обратная матрица. Запись и решение системы линейных уравнений в матричной форме.

Правило Крамера. Условия, при которых однородная система n линейных уравнений с n неизвестными имеет ненулевые решения.

### **Тема 4. Векторные пространства.**

Понятие векторного пространства. Примеры векторных пространств (плоскость и физическое 3-мерное пространство, пространство строк над данным полем, пространства многочленов, функций и матриц, пространство решений однородной системы линейных уравнений, нулевое пространство). Простейшие свойства векторных пространств. Линейная зависимость и независимость системы векторов. Базис и размерность векторного пространства. Координаты вектора. Связь между координатами векторов относительно различных базисов.

Изоморфизм векторных пространств.

Подпространства векторного пространства. Линейная оболочка множества векторов. Линейное многообразие. Пересечение и сумма подпространств. Прямая сумма подпространств.

Евклидовы пространства. Длина вектора. Угол между векторами. Ортогональная система векторов. Дополнение ортогональной системы векторов до ортогонального базиса, процесс ортогонализации. Ортонормированный базис. Изоморфизм евклидовых пространств. Ортогональное дополнение подпространства.

#### **Тема 5. Линейные операторы.**

Определение, примеры и простейшие свойства линейных операторов. Задание линейного оператора при помощи отображения базиса. Матрица линейного оператора. Область значений и ядро линейного оператора. Инвариантные подпространства. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Характеристическое уравнение. Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду.

#### **Тема 6. Квадратичные формы.**

Определение квадратичной формы, матрица квадратичной формы, преобразование матрицы квадратичной формы при переходе к новому базису. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Закон инерции квадратичных форм. Знакоопределенные квадратичные формы. Линейная модель обмена (модель международной торговли).

**Таблица 3.**  
**Матрица соотношения тем/разделов**  
**учебной дисциплины/модуля и формируемых в них компетенций**

Темы, разделы дисциплины	Кол-во часов	Компетенции		
		УК-1	ОПК-2	общее количество компетенций
Системы линейных уравнений и их решение методом Жордана—Гаусса.	48	+	+	2
Исследование системы линейных уравнений.	48	+	+	2
Матрицы и определители.	48	+	+	2
Векторные пространства.	48	+	+	2
Линейные операторы.	48	+	+	2
Квадратичные формы	48	+	+	2

### **5. ПЕРЕЧЕНЬ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ**

5.1. Указания по организации и проведению лекционных, практических (семинарских) и лабораторных занятий с перечнем учебно-методического обеспечения

**Порядок проведения лекционного занятия.**

Лекция как элемент образовательного процесса должна включать следующие этапы:

- 1 формулировку темы лекции;
- 2 указание основных изучаемых разделов или вопросов и предполагаемых затрат времени на их изложение;
- 3 изложение вводной части;
- 4 изложение основной части лекции;
- 5 краткие выводы по каждому из вопросов;
- 6 заключение;
- 7 рекомендации литературных источников по излагаемым вопросам.

5.2. Указания для обучающихся по освоению дисциплины (модулю)

### Методические рекомендации для студентов

#### Организация самостоятельной работы

Успешное освоение курса требует напряжённой самостоятельной работы студента. В программе курса приведено минимально необходимое время для работы студента над темой. Самостоятельная работа включает в себя:

- проработку учебного материала (по конспектам лекций, учебной и научной литературе);
- подготовку к практическим занятиям, выполнение домашних теоретических и практических заданий.

**Таблица 4.**  
**Содержание самостоятельной работы обучающихся**

Номер радела (темы)	Темы/вопросы, выносимые на самостоятельное изучение	Кол-во часов	Формы работы
1	Системы линейных уравнений и их решение методом Жордана—Гаусса.	36	Изучение учебной литературы и решение практических задач
2	Исследование системы линейных уравнений.	36	
3	Матрицы и определители.	36	
4	Векторные пространства.	36	
5	Линейные операторы.	36	
6	Квадратичные формы	36	

5.3. Виды и формы письменных работ, предусмотренных при освоении дисциплины, выполняемые обучающимися самостоятельно.

В дисциплине выполнение письменных работ, таких как курсовая работа, эссе, реферат, доклад и т.п. не предусматривается.

## 6. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

6.1. Образовательные технологии

№	Интерактивные формы	Описание
---	---------------------	----------

1	Лекция – визуализация.	Данный вид лекции является результатом нового использования принципа наглядности. Подготовка данной лекции преподавателем состоит в том, чтобы изменить, переконструировать учебную информацию по теме лекционного занятия в визуальную форму для представления студентам через технические средства обучения или вручную (схемы, рисунки, чертежи и т.п.). Чтение лекции сводится к связному, развернутому комментированию преподавателем подготовленных наглядных материалов, полностью раскрывающему тему данной лекции.
2	Проблемная лекция	На этой лекции новое знание вводится через проблемность вопроса, задачи или ситуации. При этом процесс познания студентов в сотрудничестве и диалоге с преподавателем приближается к исследовательской деятельности. Содержание проблемы раскрывается путем организации поиска ее решения. Лекция строится таким образом, чтобы обусловить появление вопроса в сознании студента. Учебный материал представляется в форме учебной проблемы. Она имеет логическую форму познавательной задачи, отмечающей некоторые противоречия в ее условиях и завершающейся вопросами, которые это противоречие объективирует. Проблемная ситуация возникает после обнаружения противоречий в исходных данных учебной проблемы. Учебные проблемы должны быть доступными по своей трудности для слушателей.
3	Лекция-беседа, или «диалог с аудиторией»	Лекция-беседа предполагает непосредственный контакт преподавателя с аудиторией. К участию в лекции-беседе можно привлечь различными приемами, так, например, активизация студентов вопросами в начале лекции и по ее ходу, как уже описывалось в проблемной лекции, вопросы могут, быть информационного и проблемного характера, для выяснения мнений и уровня осведомленности по рассматриваемой теме, степени их готовности к восприятию последующего материала. Вопросы адресуются всей аудитории. Слушатели отвечают с мест. Если преподаватель замечает, что кто-то из обучаемых не участвует в ходе беседы, то вопрос можно адресовать лично тому слушателю, или спросить его мнение по обсуждаемой проблеме.
4	Работа в малых группах	Парная и групповая работа реализуется как в системе аудиторных занятий (лекции, практические и семинарские занятия), так и в условиях самостоятельной подготовки студентов. Это может происходить сразу же после изложения нового материала, в начале последующего, вместо опроса, на практическом занятии, или может быть частью обобщающего итогового занятия.
5	Тестирование	контроль знаний с помощью тестов с открытыми и закрытыми вопросами для текущей и промежуточной аттестации, самоконтроля. Заключительная тема модуля может быть проведена в форме тестирования. Она позволяет выявить итоговый уровень подготовленности студента в зависимости от посещения им аудиторных занятий, выполнения практических заданий и самостоятельной работы.

## 6.2. Информационные технологии

- использование возможностей Интернета в учебном процессе электронного адреса преподавателя (рассылка заданий, ответы на вопросы, ознакомление учащихся с оценками и т.д.);
- использование электронных учебников (например, электронные библиотеки, журналы и т.д.) как источника информации;
- использование возможностей электронной почты преподавателя (рассылка заданий, материалов, ответы на вопросы);

- использование виртуальной обучающей среды (или **системы управления обучением LMS Moodle**) или иных информационных систем, сервисов и мессенджеров.

-

### 6.3. Перечень программного обеспечения и информационных справочных систем

*Перечень лицензионного программного обеспечения*

*2021-2022 уч.г.*

Наименование программного обеспечения	Назначение
Adobe Reader	Программа для просмотра электронных документов
MathCad 14	Система компьютерной алгебры из класса систем автоматизированного проектирования, ориентированная на подготовку интерактивных документов с вычислениями и визуальным сопровождением
Платформа дистанционного обучения LMS Moodle	Виртуальная обучающая среда
Mozilla FireFox	Браузер
Microsoft Office 2013, Microsoft Office Project 2013, Microsoft Office Visio 2013	Пакет офисных программ
7-zip	Архиватор
Microsoft Windows 7 Professional	Операционная система
Kaspersky Endpoint Security	Средство антивирусной защиты
KOMPAS-3D V13	Создание трехмерных ассоциативных моделей отдельных элементов и сборных конструкций из них
Blender	Средство создания трехмерной компьютерной графики
Google Chrome	Браузер
CodeBlocks	Кроссплатформенная среда разработки
Eclipse	Среда разработки
Far Manager	Файловый менеджер
Lazarus	Среда разработки
Notepad++	Текстовый редактор
OpenOffice	Пакет офисных программ
Opera	Браузер

Paint .NET	Растровый графический редактор
R	Программная среда вычислений
Scilab	Пакет прикладных математических программ
Sofa Stats	Программное обеспечение для статистики, анализа и отчетности
VirtualBox	Программный продукт виртуализации операционных систем
VLC Player	Медиапроигрыватель
VMware (Player)	Программный продукт виртуализации операционных систем
WinDjView	Программа для просмотра файлов в формате DJV и DjVu
Maple 18	Система компьютерной алгебры
MATLAB R2014a	Пакет прикладных программ для решения задач технических вычислений
Microsoft Visual Studio	Среда разработки
Oracle SQL Developer	Среда разработки
Microsoft Security Assessment Tool. Режим доступа: <a href="http://www.microsoft.com/ru-ru/download/details.aspx?id=12273">http://www.microsoft.com/ru-ru/download/details.aspx?id=12273</a> (Free)  Windows Security Risk Management Guide Tools and Templates. Режим доступа: <a href="http://www.microsoft.com/en-us/download/details.aspx?id=6232">http://www.microsoft.com/en-us/download/details.aspx?id=6232</a> (Free)	Программы для информационной безопасности

*Перечень современных профессиональных баз данных,  
информационных справочных систем*

<i>Учебный год</i>	<i>Наименование ЭБС</i>
<b>2021/2022</b>	<p>Электронный каталог Научной библиотеки АГУ на базе MARK SQL НПО «Информ-систем». <a href="https://library.asu.edu.ru">https://library.asu.edu.ru</a></p> <p>Электронный каталог «Научные журналы АГУ»: <a href="http://journal.asu.edu.ru/">http://journal.asu.edu.ru/</a> <a href="http://dlib.eastview.com">Универсальная справочно-информационная полнотекстовая база данных периодических изданий ООО "ИВИС". http://dlib.eastview.com</a> Имя пользователя: AstrGU Пароль: AstrGU</p>

<a href="http://elibrary.ru">Электронно-библиотечная система elibrary. <u>http://elibrary.ru</u></a>
Корпоративный проект Ассоциации региональных библиотечных консорциумов (АРБИКОН) «Межрегиональная аналитическая роспись статей» (МАРС) - сводная база данных, содержащая полную аналитическую роспись 1800 названий журналов по разным отраслям знаний. Участники проекта предоставляют друг другу электронные копии отсканированных статей из книг, сборников, журналов, содержащихся в фондах их библиотек. <a href="http://mars.arbicon.ru">http://mars.arbicon.ru</a>
Электронные версии периодических изданий, размещенные на сайте информационных ресурсов <a href="http://www.polpred.com">www.polpred.com</a>
Справочная правовая система КонсультантПлюс. Содержится огромный массив справочной правовой информации, российское и региональное законодательство, судебную практику, финансовые и кадровые консультации, консультации для бюджетных организаций, комментарии законодательства, формы документов, проекты нормативных правовых актов, международные правовые акты, правовые акты, технические нормы и правила. <a href="http://www.consultant.ru">http://www.consultant.ru</a>
Информационно-правовое обеспечение «Система ГАРАНТ». В системе ГАРАНТ представлены федеральные и региональные правовые акты, судебная практика, книги, энциклопедии, интерактивные схемы, комментарии ведущих специалистов и материалы известных профессиональных изданий, бланки отчетности и образцы договоров, международные соглашения, проекты законов. Предоставляет доступ к федеральному и региональному законодательству, комментариям и разъяснениям из ведущих профессиональных СМИ, книгам и обновляемым энциклопедиям, типовым формам документов, судебной практике, международным договорам и другой нормативной информации. Всего в нее включено более 2,5 млн документов. В программе представлены документы более 13 000 федеральных, региональных и местных эмитентов. <a href="http://garant-astrakhan.ru">http://garant-astrakhan.ru</a>
Единое окно доступа к образовательным ресурсам <a href="http://window.edu.ru">http://window.edu.ru</a>
Министерство науки и высшего образования Российской Федерации <a href="https://minobrnauki.gov.ru/">https://minobrnauki.gov.ru/</a>
Министерство просвещения Российской Федерации <a href="https://edu.gov.ru">https://edu.gov.ru</a>
Официальный информационный портал ЕГЭ <a href="http://www.ege.edu.ru">http://www.ege.edu.ru</a>
Федеральное агентство по делам молодежи (Росмолодежь) <a href="https://fadm.gov.ru">https://fadm.gov.ru</a>
Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки (Рособрнадзор) <a href="http://obrnadzor.gov.ru">http://obrnadzor.gov.ru</a>
Сайт государственной программы Российской Федерации «Доступная среда» <a href="http://zhit-vmeste.ru">http://zhit-vmeste.ru</a>
Российское движение школьников <a href="https://pdu.pf">https://pdu.pf</a>
Официальный сайт сетевой академии cisco: <a href="http://www.netacad.com">www.netacad.com</a>

## 7. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

7.1. Паспорт фонда оценочных средств.

**Таблица 5.**  
**Соответствие изучаемых разделов, результатов обучения и оценочных средств**

№	Контролируемые разделы	Код контролируемой	Наименование
---	------------------------	--------------------	--------------

п/п	дисциплины (модуля)	компетенции (компетенций)	оценочного средства
1	Системы линейных уравнений и их решение методом Жордана—Гаусса.	УК-1, ОПК-2	КР №1, экзамен
2	Исследование системы линейных уравнений.	УК-1, ОПК-2	КР №2, экзамен
3	Матрицы и определители.	УК-1, ОПК-2	КР №3, экзамен
4	Векторные пространства.	УК-1, ОПК-2	КР №4, экзамен
5	Линейные операторы.	УК-1, ОПК-2	КР №5, экзамен
6	Квадратичные формы	УК-1, ОПК-2	КР №6, экзамен

## 7.2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций, описание шкал оценивания

Итоговая оценка успеваемости студентов по дисциплине производится согласно положению о балльно-рейтинговой системе оценки учебных достижений студентов, утвержденного Ученым советом АГУ от 30.12.2013 г.

**Таблица 6.**  
**Критерии оценивания результатов обучения**

5 «отлично»	<ul style="list-style-type: none"> <li>-дается комплексная оценка предложенной ситуации;</li> <li>-демонстрируются глубокие знания теоретического материала и умение их применять;</li> <li>- последовательное, правильное выполнение всех заданий;</li> <li>-умение обоснованно излагать свои мысли, делать необходимые выводы.</li> </ul>
4 «хорошо»	<ul style="list-style-type: none"> <li>-дается комплексная оценка предложенной ситуации;</li> <li>-демонстрируются глубокие знания теоретического материала и умение их применять;</li> <li>- последовательное, правильное выполнение всех заданий;</li> <li>-возможны единичные ошибки, исправляемые самим студентом после замечания преподавателя;</li> <li>-умение обоснованно излагать свои мысли, делать необходимые выводы.</li> </ul>
3 «удовлетворительно»	<ul style="list-style-type: none"> <li>-затруднения с комплексной оценкой предложенной ситуации;</li> <li>-неполное теоретическое обоснование, требующее наводящих вопросов преподавателя;</li> <li>-выполнение заданий при подсказке преподавателя;</li> <li>- затруднения в формулировке выводов.</li> </ul>
2 «неудовлетворительно»	<ul style="list-style-type: none"> <li>- неправильная оценка предложенной ситуации;</li> <li>-отсутствие теоретического обоснования выполнения заданий.</li> </ul>

## 7.3. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

**Тема 1 «Системы линейных уравнений и их решение методом Жордана–Гаусса»**

**Тема 2 «Исследование системы линейных уравнений»**

**Тема 3 «Матрицы и определители»**

## КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

### ЗАДАНИЕ № 1.

Решить системы линейных уравнений методом последовательного исключения неизвестных

$$\text{(методом Гаусса).} \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4. \end{cases}$$

### ЗАДАНИЕ № 2.

Даны векторы  $a_1 = (4,3,2,1)$ ,  $a_2 = (3,3,2,2)$ ,  $a_3 = (1,1,1,3)$ ,  $a_4 = (4,4,3,5)$ ,  $a_5 = (-5,-4,-3,-4)$ . Найти всевозможные линейные зависимости между векторами  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ . Можно ли вектор  $a_2$  линейно выразить через векторы  $a_1$  и  $a_3$ ? Можно ли вектор  $a_5$  линейно выразить через векторы  $a_1, a_2, a_3, a_4$ ? Найти какой-нибудь базис системы векторов  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ . Выразить все векторы данной системы через векторы найденного базиса.

### ЗАДАНИЕ № 3.

Дано:  $a_1 = (3,4,2)$ ,  $a_2 = (6,8,4)$ ,  $b = (9,12, \uparrow)$ . Найти все значения  $\uparrow$ , при которых вектор  $b$  линейно выражается через векторы  $a_1, a_2$ .

### ЗАДАНИЕ № 4.

Найти ранг основной матрицы системы линейных уравнений, фундаментальную систему

$$\text{решений и записать общее решение системы уравнений} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

### ЗАДАНИЕ № 5.

Записать и решить систему уравнений в матричной форме.

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 3, \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -3, \\ 5x_1 - 7x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$$

### ЗАДАНИЕ № 6.

Решить матричное уравнение: 
$$X \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -11 & 4 \\ 9 & -12 & 5 \\ 6 & -9 & 3 \end{pmatrix}.$$

### ЗАДАНИЕ № 7.

Решить систему линейных уравнений методом Крамера: 
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 5, \\ -x_1 + 2x_3 = 1. \end{cases}$$

### ЗАДАНИЕ № 8.

В таблице приведены данные баланса двух отраслей промышленности за некоторый период. Требуется найти объем валового выпуска продукции, если конечное потребление по отраслям увеличить соответственно на 60% и 30%.

№	Отрасль	Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск
		1	2		
1	Добывающая	50	20	30	100
2	Перерабатывающая	20	20	10	50

#### Тема 4 «Векторные пространства»

#### Тема 5 «Линейные операторы»

#### Тема 6 «Квадратичные формы»

### КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

#### ЗАДАНИЕ № 1.

Доказать, что отображение  $f$ , описываемое путем задания координат вектора  $f(x)$  как функций координат вектора  $x = (x_1, x_2, x_3)$  в некотором базисе пространства  $R^3$ , является линейным оператором и найти его матрицу в том же базисе, в котором заданы координаты векторов  $x$  и  $f(x) = (0; x_3 - x_1; 2x_3 + 2x_2)$ .

#### ЗАДАНИЕ № 2.

Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в

некотором базисе данной матрицей: 
$$\begin{pmatrix} 6 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & -1 \\ 21 & -3 & -7 \end{pmatrix}.$$

#### ЗАДАНИЕ № 3.

Найти базис суммы и пересечения линейных подпространств, порожденных соответственно векторами  $a_1 = (1; 2; 1; -2)$ ,  $a_2 = (2; 3; 1; 0)$ ,  $a_3 = (1; 2; 2; -3)$ ;  $b_1 = (1; 1; 1; 1)$ ,  $b_2 = (1; 1; 0; 2)$ ,  $b_3 = (1; 0; 1; 0)$ .

#### ЗАДАНИЕ № 4.

Применяя процесс ортогонализации, построить ортогональный базис линейной оболочки системы векторов  $a_1 = (0; 1; -1; 2)$ ,  $a_2 = (1; 0; -2; 2)$ ,  $a_3 = (-1; 1; 0; -2)$ ,  $a_4 = (1; -1; -2; 2)$ , заданных своими координатами в некотором ортонормированном базисе.

#### ЗАДАНИЕ № 5.

Записать квадратичную форму, имеющую данную матрицу: 
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

#### ЗАДАНИЕ № 6.

Записать квадратичную форму, полученную из данной с помощью заданного линейного преобразования:

$$1) x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_3^2; \quad y_1 = x_2 - x_1, \quad y_2 = x_3 - x_2, \quad y_3 = x_1 + x_2 + x_3;$$

2)  $A$  – матрица квадратичной формы,  $C$  – матрица преобразования

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & -5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$3) x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 5x_2^2 + 12x_2x_3 + 7x_3^2 \quad (n=3); \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$4) A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & -5 \end{pmatrix}; \quad x_1 = y_3 - y_1, \quad x_2 = 3y_2 + 4y_1 - y_3, \quad x_3 = 2y_2 - y_1.$$

**ЗАДАНИЕ № 7.** Привести данную квадратичную форму к каноническому виду. Найти ранг и положительный и отрицательный индексы. Какие из данных форм являются положительно определенными?

$$1) 4x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2;$$

$$2) x_1^2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 + 4x_3^2;$$

$$3) 9x_1^2 - 12x_1x_2 - 6x_1x_3 + 4x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2;$$

$$4) x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1.$$

### ИТОГОВЫЙ ТЕСТ

*В заданиях А1 – А8 Выберите правильный вариант ответа.*

#### **А1.(5 баллов)**

Какой из указанных векторов является решением системы?

$$\begin{cases} 2x_1 - 7x_2 + 4x_3 = -6, \\ 5x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 5, \\ 6x_1 + x_2 - 2x_3 = 12. \end{cases}$$

$$1) (2;-1;4); \quad 2) (3;2;1); \quad 3) (-1;1;3); \quad 4) (2;2;1).$$

#### **А2. (5 баллов)**

Сколько решений может иметь система?

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$$

$$1) 4; \quad 2) 3; \quad 3) 0; \quad 4) 1.$$

#### **А3.(2 балла)**

Как изменится ранг данной матрицы, если из нее вычеркнуть вторую строку?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 12 \\ -1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

- 1) увеличится на 1;    2) уменьшится на 1;  
3) не изменится;    4) уменьшится на 2.

**A4. (8 баллов)**

Известно, что существуют сумма матриц  $A + B$  и их произведение  $AB$ . В матрице  $A$  3 строки. Пусть в матрице  $B$   $k$  столбцов. Тогда

- 1)  $k = 1$ ;    2)  $k = 2$ ;    3)  $k = 3$ ;    4)  $k$  - любое.

**A5. (8 баллов)**

Матрица  $B$  получается из матрицы  $A$  умножением всех элементов первой строки на 2. Каким из указанных преобразований получается матрица  $B^{-1}$  из матрицы  $A^{-1}$ ?

- 1) Все элементы первой строки умножаются на 2.  
2) Все элементы первой строки делятся на 2.  
3) Все элементы первого столбца умножаются на 2.  
4) Все элементы первого столбца делятся на 2.

**A6. (5 баллов)**

Известно, что  $\det(A^t B) = 10$ . Чему равен  $\det(B^t A)$ ?

- 1) 0,1;    2) -10;    3) -0,1;    4) 10.

**A7. (2 балла)**

Являются ли векторы  $a, 2a, b, b$ -с линейно зависимыми?

- 1) нет;    2) да.

**A8. (8 баллов)**

В матрице  $A$  8 строк и 5 столбцов. Верно ли, что строки этой матрицы линейно независимы?

1. да;    2) нет.

*В заданиях B1 – B12 ответом является целое число или конечная десятичная дробь. Укажите это число.*

**B1. (5 баллов)** Найти сумму значений  $a$ , при которых векторы  $(2; -3; 2-4a)$  и  $(4; -6; 2a-6)$  линейно зависимы.

**B2. (5 баллов)** Сколько базисов имеет система векторов  $(1; 4; -1), (-3; -12; 3), (2; 4; 1)$ ?

**B3. (2 балла)** Общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса имеет вид:  $x_1 = 3x_2 + x_4 - x_5$ ,  $x_3 = x_4 + x_5$ ,  $x_2, x_4, x_5$  – любые. Сколько векторов содержит фундаментальная система решений?

**B4. (5 баллов)** Известно, что

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица С получается из А умножением всех элементов первой строки на 2. Чему равна сумма элементов первой строки матрицы СВ?

**В5. (5 баллов)** Чему равна сумма элементов первой строки матрицы  $A^{-1}$ , если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}?$$

**В6. (5 баллов)** А – матрица 4 порядка. Пусть  $a_1, a_2, a_3, a_4$  – строки матрицы А. Пусть строки матрицы В суть  $a_2, a_3, a_4, a_1$ . Известно, что  $\det A = 5$ . Чему равен  $\det B$ ?

**В7. (5 баллов)** А – матрица 5 порядка. Известно, что  $\det A = 7$ . Чему равен  $\det(2A)$ ?

**В8. (5 баллов)** Известно, что  $\det A = 5, \det B = 4$ . Чему равен  $\det(A^{-1}B)$ ?

**В9. (2 балла)** Чему равен определитель, если первая его строка равна сумме второй и третьей строк?

**В10. (8 баллов)** Найти сумму значений  $\lambda$  при которых матрица обратная к данной не существует

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 8 & 1 \\ 10 & -5 & \lambda \end{pmatrix}$$

**В11. (5 баллов)** В системе три уравнения и три неизвестных, основная матрица системы невырождена. Столбец свободных членов равен удвоенному столбцу коэффициентов при  $x_2$ . Чему равна разность  $x_3 - x_1$ ?

**В12. (5 баллов)** Фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений содержит 5 решений. Ранг основной матрицы системы равен 4. Сколько неизвестных в этой системе?

### Вопросы к экзамену 1

1. Системы линейных уравнений. Совместные и несовместные системы.
2. Равносильные системы уравнений. Элементарные преобразования матрицы.
3. Приведение матрицы к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований.
4. Решение системы линейных уравнений методом Гаусса-Жордана.
5. Ранг матрицы. Критерий совместности системы линейных уравнений.
6. Фундаментальный набор решений однородной системы линейных уравнений.
7. Операции над матрицами и их свойства.
8. Обратимые матрицы. Условия обратимости матрицы. Вычисление обратной матрицы.
9. Определители. Основные свойства определителей.
10. Миноры и алгебраические дополнения. Разложение определителя по строке или столбцу.
11. Необходимые и достаточные условия равенства нулю определителя. Определитель произведения матриц.
12. Теорема о ранге матрицы. Обратная матрица. Запись и решение системы линейных уравнений в матричной форме.
13. Правило Крамера. Условия, при которых однородная система  $n$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными имеет ненулевые решения.

### Вопросы к экзамену 2

1. Определение, примеры и простейшие свойства линейных пространств.
2. Линейная зависимость и независимость векторов.
3. Базис и размерность линейного пространства.
4. Дополнение линейно независимой системы векторов до базиса пространства.
5. Связь между различными базисами пространства.
6. Подпространства линейного пространства.
7. Сумма и пересечение подпространств.
8. Определение, примеры и свойства евклидова пространства.
9. Длина вектора и угол между двумя векторами в евклидовом пространстве.
10. Ортогональный и ортонормированный базисы.
11. Определение, простейшие свойства и примеры линейных операторов.
12. Матрица линейного оператора.
13. Характеристическое уравнение линейного оператора.
14. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.
15. Приведение матрицы к диагональному виду.
16. Матрица квадратичной формы при переходе к новому базису.
17. Приведение квадратичной формы к каноническому виду.
18. Закон инерции квадратичных форм. Знакоопределенные квадратичные формы.
19. Линейная модель обмена (модель международной торговли).

#### **7.4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Итоговая оценка успеваемости студентов по дисциплине производится согласно положению о балльно-рейтинговой системе оценки учебных достижений студентов, утвержденного Ученым советом АГУ от 30.12.2013 г.

Устные ответы по вопросам и выполнение контрольных работ оцениваются по 4-х балльной системе: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

*Критерии оценки ответов на теоретические вопросы:*

2. оценка «отлично» («5») выставляется студенту, если он демонстрирует глубокие знания теоретического материала, умение обоснованно излагать свои мысли по обсуждаемым вопросам, способность правильно отвечать на дополнительные вопросы;
3. оценка «хорошо» («4») - если студент демонстрирует глубокие знания теоретического материала, последовательное изложение, допускает единичные ошибки, исправляемые самим студентом после замечания преподавателя;
4. оценка «удовлетворительно» («3») - при наличии существенных ошибок в изложении теоретического материала, неполное изложение теоретического материала, требующее наводящих вопросов преподавателя;
5. оценка «неудовлетворительно» («2») - при отсутствии целостного ответа по вопросу, существенных пробелах в знаниях.

*Критерии оценки результатов выполнения контрольных работ:*

- оценка «отлично» («5») выставляется студенту, если он демонстрирует глубокие знания теоретического материала и умение их применять; последовательно, правильно выполняет задание; умеет обоснованно излагать свои мысли, делать необходимые выводы;
- оценка «хорошо» («4») выставляется студенту, если он демонстрирует глубокие знания теоретического материала и умение их применять; последовательно, правильно выполняет задание; допускает единичные ошибки, исправляемые самим студентом

после замечания преподавателя; умеет обоснованно излагать свои мысли, делать необходимые выводы;

- оценка «удовлетворительно» («3») выставляется студенту, если он испытывает затруднения при выполнении задания; дает неполное теоретическое обоснование, требующее наводящих вопросов преподавателя; выполняет задание при подсказке преподавателя; затрудняется в формулировке выводов;
- оценка «неудовлетворительно» («2») выставляется студенту, если он не способен правильно выполнить задание.

Полученные за устные ответы и выполнение заданий баллы суммируются. Максимально возможный суммарный балл за работу на занятиях – 50.

От 0 до 50 баллов обучающиеся получают за ответ на экзамене.

Дополнительно 10 баллов возможно набрать бонусами за активность на занятиях, посещение занятий без пропусков по неуважительным причинам.

Предусмотрена также система штрафов:

- вычитается 1 балл за опоздание;
- вычитается по 2 балла за неподготовленность к занятию, нарушение учебной дисциплины, пропуск занятий без уважительной причины.

Преподаватель, реализующий дисциплину (модуль), в зависимости от уровня подготовленности обучающихся может использовать иные формы, методы контроля и оценочные средства, исходя из конкретной ситуации.

## **8. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)**

### **а) Основная литература:**

1. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: методические указания, решение типовых задач и варианты заданий для студентов 1-го курса МГСУ, обучающихся по направлениям подготовки 080100 «Экономика», 080200 «Менеджмент», 230100 «Информатика и вычислительная техника».— М.: Московский государственный строительный университет, Ай Пи Эр Медиа, ЭБС АСВ, 2014. — 83 с. URL: <http://www.iprbookshop.ru/25511.html>. (ЭБС «IPRbooks»)
2. Пчелинцев С.В., Сборник задач по курсу "Математика в экономике". В 3-х ч. Ч. 1. Линейная алгебра, аналитическая геометрия и линейное программирование: учеб. пособие / С.В. Пчелинцев, В.А. Бабайцев, А.С. Солодовников и др.; под ред. В.А. Бабайцева и В.Б. Гисина. - М. : Финансы и статистика, 2013. - 256 с. URL: <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785279034413.html>. (ЭБС «Консультант студента»).
3. Солодовников А.С., Математика в экономике: учебник. Ч. 1. Линейная алгебра, аналитическая геометрия и линейное программирование / А.С. Солодовников, В.А. Бабайцев, А.В. Браилов, И.Г. Шандра. - 3-е изд., перераб. и доп.- М. : Финансы и статистика, 2013. - 384 с. URL: <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785279034888.html>. (ЭБС «Консультант студента»).

### **б) Дополнительная литература:**

1. Беклемишев Д.В., Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Учеб. для вузов. / Беклемишев Д. В. - 12-е изд., испр. - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2009. - 312 с. URL: [HTTP://WWW.STUDENTLIBRARY.RU/BOOK/ISBN9785922109796.HTML](http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922109796.html). (ЭБС «Консультант

- студента»).
2. Бутузов В.Ф., Линейная алгебра в вопросах и задачах: Учеб. пособие / Под ред. В.Ф. Бутузова. - 2-е изд., испр. - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. - 248 с. URL: [HTTP://WWW.STUDENTLIBRARY.RU/BOOK/ISBN5922102850.HTML](http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN5922102850.html). (ЭБС «Консультант студента»).
  3. Елькин А.Г. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: учебное пособие/ Елькин А.Г.— Саратов: Вузовское образование, 2018. — 95 с. URL: [HTTP://WWW.IPRBOOKSHOP.RU/77939.HTML](http://www.iprbookshop.ru/77939.html). (ЭБС «IPRbooks»)
  4. Лебедева Е.А., Практические занятия по линейной алгебре и аналитической геометрии: учеб.-метод. пособие / Лебедева Е.А. - Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2013.- 130 с. URL: [HTTP://WWW.STUDENTLIBRARY.RU/BOOK/ISBN9785778222755.HTML](http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785778222755.html). (ЭБС «Консультант студента»).

**в) Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимый для освоения дисциплины (модуля)**

Электронный каталог Научной библиотеки АГУ на базе MARK SQL НПО «Информ-систем». <https://library.asu.edu.ru>

**Электронно-библиотечная система (ЭБС) ООО «Политехресурс» «Консультант студента».** Многопрофильный образовательный ресурс «Консультант студента» является электронной библиотечной системой, предоставляющей доступ через сеть Интернет к учебной литературе и дополнительным материалам, приобретенным на основании прямых договоров с правообладателями. Каталог содержит более 15 000 наименований изданий.

[www.studentlibrary.ru](http://www.studentlibrary.ru). *Регистрация с компьютеров АГУ*

**Электронная библиотечная система IPRbooks.** [www.iprbookshop.ru](http://www.iprbookshop.ru)

## **9. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)**

Для проведения занятий по дисциплине «Линейная алгебра» имеются лекционные аудитории, оборудованные мультимедийной техникой с возможностью презентации обучающих материалов, фрагментов фильмов; аудитории для проведения семинарских и практических занятий, оборудованные учебной мебелью и средствами наглядного представления учебных материалов; библиотека с местами, оборудованными компьютерами, имеющими доступ к сети Интернет.

При необходимости рабочая программа дисциплины (модуля) может быть адаптирована для обеспечения образовательного процесса инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья, в том числе для обучения с применением дистанционных образовательных технологий. Для этого требуется заявление студента (его законного представителя) и заключение психолого-медико-педагогической комиссии (ПМПК).

СОГЛАСОВАНО

Руководитель ОПОП

И.О. Фамилия

«\_\_» \_\_\_\_\_ 201\_\_ г.

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_  
(наименование)

И.О. Фамилия

«\_\_» \_\_\_\_\_ 201\_\_ г.

### ЛИСТ ИЗМЕНЕНИЙ

в рабочей программе (модуле) дисциплины \_\_\_\_\_  
(название дисциплины)

по направлению подготовки \_\_\_\_\_

на 20\_\_/20\_\_ учебный год

1. В \_\_\_\_\_ вносятся следующие изменения:  
(элемент рабочей программы)

- 1.1. ....;
- 1.2. ....;
- ...
- 1.9. ....

2. В \_\_\_\_\_ вносятся следующие изменения:  
(элемент рабочей программы)

- 2.1. ....;
- 2.2. ....;
- ...
- 2.9. ....

3. В \_\_\_\_\_ вносятся следующие изменения:  
(элемент рабочей программы)

- 3.1. ....;
- 3.2. ....;
- ...
- 3.9. ....

Составитель

\_\_\_\_\_   
подпись

/ \_\_\_\_\_ /  
ФИО, ученая степень, звание, должность