

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Астраханский государственный университет имени В.Н. Татищева»  
(Астраханский государственный университет им. В.Н. Татищева)

СОГЛАСОВАНО

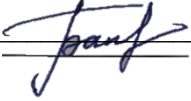
Руководитель ОПОП

А.М. Лихтер

«\_02\_» \_\_\_\_06\_\_\_\_ 2022 г.

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой МиМП

 И.А. Байгушева

«\_02\_» \_\_\_\_06\_\_\_\_ 2022 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

**Теория  
функций комплексного переменного**

|                        |                                                                   |
|------------------------|-------------------------------------------------------------------|
| Составитель            | <b>Захаров С.А., кандидат физико-математических наук, доцент;</b> |
| Направление подготовки | <b>03.03.02 ФИЗИКА</b>                                            |
| Профили ОПОП           | <b>ИНЖЕНЕРНАЯ ФИЗИКА</b>                                          |
| Квалификация (степень) | <b>бакалавр</b>                                                   |
| Форма обучения         | <b>очная</b>                                                      |
| Год приёма             | <b>2021</b>                                                       |
| Курс                   | <b>2</b>                                                          |
| Семестр                | <b>4</b>                                                          |

Астрахань – 2022

## 1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

**1.1. Целями освоения дисциплины «Теория функций комплексного переменного»** ознакомить студентов с основными определениями и теоремами курса, дать ясное представление о поведении основных элементарных функций на комплексной плоскости, в том числе многозначных.

**1.2. Задачи освоения дисциплины:** научить решать типичные задачи, такие, как вычисление несобственных интегралов с помощью вычетов, находить конформное отображение одной заданной области на другую.

## 2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП

**2.1. Учебная дисциплина «Теория функций комплексного переменного»** относится к обязательной части и осваивается в 4 семестре.

**2.2. Для изучения данной учебной дисциплины необходимы следующие знания, умения, навыки, формируемые предшествующими учебными дисциплинами:** Математический анализ, Аналитическая геометрия, Линейная алгебра. Дифференциальные уравнения.

Знания: основных понятий и теорем математического анализа и линейной алгебры.

Умения: проводить рассуждения при доказательстве утверждений.

Навыки: решать стандартные задачи математического анализа и алгебры.

**2.3. Последующие учебные дисциплины и практики, для которых необходимы знания, умения, навыки, формируемые данной учебной дисциплиной:**

теоретическая физика, атомная физика, физика атомного ядра и элементарных частиц, теоретическая механика, механика сплошных сред, электродинамика, квантовая теория, физика конденсированного состояния, термодинамика, статистическая физика, физическая кинетика, радиоэлектроника.

## 3. ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Процесс освоения дисциплины направлен на формирование элементов следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО и ОПОП ВО по данному направлению подготовки:

а) универсальной: УК-1. Способность осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач

б) общепрофессиональной: ОПК-1. Способность применять базовые знания в области физико-математических и (или) естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности

**Таблица 1 – Декомпозиция результатов обучения**

| Код<br>и наименование<br>компетенции                                                                                                              | Планируемые результаты обучения по дисциплине                                                                                                                                                |                                                                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                                          |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                                                                                                   | Знать (1)                                                                                                                                                                                    | Уметь (2)                                                                                                                                                                                                          | Владеть (3)                                                                                                                                                                                                              |
| УК-1. Способность осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач           | УК-1.1 знать методики поиска, сбора и обработки информации                                                                                                                                   | УК-1.4 уметь применять методики поиска, сбора и обработки информации                                                                                                                                               | УК-1.7 владеть методами поиска, сбора и обработки, критического анализа и синтеза информации                                                                                                                             |
|                                                                                                                                                   | УК-1.2 знать актуальные российские и зарубежные источники информации в сфере профессиональной деятельности                                                                                   | УК-1.5 уметь осуществлять критический анализ и синтез информации, полученной из разных источников                                                                                                                  | УК-1.8 владеть методикой системного подхода для решения поставленных задач                                                                                                                                               |
|                                                                                                                                                   | УК-1.3 знать метод системного анализа                                                                                                                                                        | УК-1.6 уметь применять системный подход для решения поставленных задач                                                                                                                                             |                                                                                                                                                                                                                          |
| ОПК-1. Способность применять базовые знания в области физико-математических и (или) естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности | ОПК-1.1 знать основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования | ОПК-1.2 уметь использовать базовые знания естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования | ОПК-1.3 владеть навыками использования знаний естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применения методов математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования |

#### 4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Объём дисциплины составляет 2 зачётные единицы, в том числе 54 часа, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (из них 18 часов – лекции, 36 часов – практические, семинарские занятия), и 18 часов – на самостоятельную работу обучающихся.

**Таблица 2 – Структура и содержание дисциплины**

| Раздел, тема дисциплины                     | Семестр | Контактная работа<br>(в часах) |           |    | Самост. работа |           | Форма текущего контроля успеваемости, форма промежуточной аттестации<br>[по семестрам] |
|---------------------------------------------|---------|--------------------------------|-----------|----|----------------|-----------|----------------------------------------------------------------------------------------|
|                                             |         | Л                              | ПЗ        | ЛР | КР             | СР        |                                                                                        |
| Комплексные числа                           | 4       | 3                              | 6         |    |                | 3         | контрольная работа № 1                                                                 |
| Функции комплексной переменной. Производная |         | 3                              | 6         |    |                | 3         | контрольная работа № 2,<br>коллоквиум № 1                                              |
| Простейшие элементарные функции             |         | 3                              | 6         |    |                | 3         |                                                                                        |
| Интеграл функции комплексной переменной     |         | 3                              | 6         |    |                | 3         | контрольная работа № 3,<br>коллоквиум № 2                                              |
| Ряды Тейлора и Лорана                       |         | 3                              | 6         |    |                | 3         |                                                                                        |
| Теория вычетов                              |         | 3                              | 6         |    |                | 3         |                                                                                        |
| <b>Итого</b>                                |         | <b>18</b>                      | <b>36</b> |    |                | <b>18</b> | <b>Экзамен</b>                                                                         |

**Таблица 3 – Матрица соотношения разделов, тем учебной дисциплины и формируемых компетенций**

| Раздел, тема дисциплины                     | Кол-во часов | Код компетенции |       | Общее количество компетенций |
|---------------------------------------------|--------------|-----------------|-------|------------------------------|
|                                             |              | УК-1            | ОПК-1 |                              |
| Комплексные числа                           | 12           | +               | +     | 2                            |
| Функции комплексной переменной. Производная | 12           | +               | +     | 2                            |
| Простейшие элементарные функции             | 12           | +               | +     | 2                            |
| Интеграл функции комплексной переменной     | 12           | +               | +     | 2                            |
| Ряды Тейлора и Лорана                       | 12           | +               | +     | 2                            |
| Теория вычетов                              | 12           | +               | +     | 2                            |
| <b>Итого</b>                                | <b>72</b>    |                 |       |                              |

### Краткое содержание каждой темы дисциплины

#### Краткое содержание каждой темы дисциплины

**Тема 1. Комплексные числа.** Алгебраическая и тригонометрическая формы. Корень  $n$ -ой степени. Сходящиеся последовательности комплексных чисел: критерий Коши, расширенная комплексная плоскость (сфера Римана).

**Тема 2. Функции комплексной переменной. Производная.** Функции комплексного переменного, предел и непрерывность функции в точке. Производная функции комплексного переменного. Аналитические функции. Условия Коши-Римана и гармонические функции. Дифференцирование элементарных функций.

**Тема 3. Простейшие элементарные функции.** Линейная функции, дробно-линейная функция, показательная и логарифмическая функции, тригонометрические функции, степенная функция, функция Жуковского.

**Тема 4. Интеграл функции комплексного переменного.** Интеграл Коши и интегральная формула Коши.

**Тема 5. Ряды Тейлора и Лорана.** Степенные ряды: аналитические функции и их разложения в степенные ряды. Свойства максимума модуля аналитических и гармонических функций. Изолированные особые точки аналитических функций и их классификация. Ряд Лорана. Изучение аналитических функций в окрестности бесконечно удаленной точки.

**Тема 6. Теория вычетов.** Вычеты, их применение. Вычеты и основная теорема о вычетах. Применения к вычислению интегралов. Лемма Жордана. Конформные отображения односвязных областей. Теорема Римана (без доказательства). Преобразование Лапласа и понятие об операционном исчислении.

## **5. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРЕПОДАВАНИЮ И ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ**

### **5.1. Указания для преподавателей по организации и проведению учебных занятий по дисциплине**

Лекция как элемент образовательного процесса должна включать в себя следующие этапы:

1. Формулировку темы лекции.
2. Указание основных изучаемых разделов или вопросов и предполагаемых затрат времени на их изложение.
3. Изложение вводной части.
4. Изложение основной части лекции.
5. Краткие выводы по каждому из вопросов.
6. Заключение.
7. Рекомендации литературных источников по излагаемым вопросам.

### **5.2. Указания для обучающихся по освоению дисциплины**

Успешное освоение дисциплины требует напряжённой работы студента. В программе курса приведено минимально необходимое время для работы студента над темой.

Самостоятельная работа студентов распадается на два самостоятельных направления: на изучение и освоение теоретического лекционного материала и на освоение методики решения практических задач.

Самостоятельная работа включает в себя:

проработку учебного материала (по конспектам лекций, учебной и научной литературе);

подготовку к практическим занятиям, выполнение домашних теоретических и практических заданий.

**Таблица 4 – Содержание самостоятельной работы обучающихся**

| Номер темы | Темы/вопросы, выносимые на самостоятельное изучение                                  | Кол-во часов | Формы работы                         |
|------------|--------------------------------------------------------------------------------------|--------------|--------------------------------------|
| 1          | Алгебраическая и тригонометрическая формы.                                           | 1            | Работа с литературой. Решение задач. |
| 1          | Корень $n$ -ой степени                                                               | 2            |                                      |
| 2          | Условия Коши-Римана и гармонические функции. Дифференцирование элементарных функций. | 3            |                                      |

|   |                                                                                     |   |  |
|---|-------------------------------------------------------------------------------------|---|--|
| 3 | Линейная функции, дробно-линейная функция, показательная и логарифмическая функции. | 3 |  |
| 4 | Интеграл типа Коши и интегральная формула Коши.                                     | 3 |  |
| 5 | Изучение аналитических функций в окрестности бесконечно удаленной точки.            | 3 |  |
| 6 | Конформные отображения односвязных областей. Теорема Римана                         | 3 |  |

### 5.3. Виды и формы письменных работ, предусмотренных при освоении дисциплины, выполняемые обучающимися самостоятельно

Письменные работы, самостоятельно выполняемые обучающимися (курсовая работа / курсовой проект, реферат, доклад и т.п.) учебным планом и рабочей программой при освоении дисциплины, не предусмотрены.

## 6. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

### 6.1. Образовательные технологии

**Таблица 5 – Образовательные технологии, используемые при реализации учебных занятий**

| Тема дисциплины                                     | Форма учебного занятия                                                            |                                                                                                                     |                     |
|-----------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|
|                                                     | Лекция                                                                            | Практическое занятие, семинар                                                                                       | Лабораторная работа |
| Тема 1. Комплексные числа.                          | Лекция-визуализация, лекция-беседа, проблемная лекция                             | Фронтальный опрос, выполнение практических заданий, тематические дискуссии                                          | Не предусмотрено    |
| Тема 2. Функции комплексной переменной. Производная | Перевернутый урок, технология «Кластер», Mind map — техника визуализации мышления | Фронтальный опрос, технология дифференцированного обучения, выполнение практических заданий, работа в малых группах | Не предусмотрено    |
| Тема 3. Простейшие элементарные функции             | Лекция – визуализация, лекция-беседа, проблемная лекция                           | Фронтальный опрос, технология дифференцированного обучения, выполнение практических заданий, работа в малых группах | Не предусмотрено    |
| Тема 4. Интеграл функции комплексной переменной     | Перевернутый урок, технология «Кластер», Mind map — техника                       | Фронтальный опрос, выполнение практических заданий, тематические дискуссии                                          | Не предусмотрено    |

|                               |                                                       |                                                                            |                  |
|-------------------------------|-------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|------------------|
|                               | визуализации мышления                                 |                                                                            |                  |
| Тема 5. Ряды Тейлора и Лорана | Лекция-визуализация, лекция-беседа, проблемная лекция | Фронтальный опрос, выполнение практических заданий, тематические дискуссии | Не предусмотрено |
| Тема 6. Теория вычетов        | Лекция-визуализация, лекция-беседа, проблемная лекция | Фронтальный опрос, выполнение практических заданий, тематические дискуссии | Не предусмотрено |

## 6.2. Информационные технологии

использование возможностей интернета в учебном процессе (рассылка заданий, предоставление выполненных работ, ответы на вопросы, ознакомление обучающихся с оценками и т. д.);

использование электронных учебников и различных сайтов (например, электронных библиотек, журналов и т. д.) как источников информации;

использование возможностей электронной почты преподавателя;

использование средств представления учебной информации (электронных учебных пособий и практикумов, применение новых технологий для проведения очных (традиционных) лекций и семинаров с использованием презентаций и т. д.);

использование интегрированных образовательных сред, где главной составляющей являются не только применяемые технологии, но и содержательная часть, т. е. информационные ресурсы (доступ к мировым информационным ресурсам, на базе которых строится учебный процесс);

использование виртуальной обучающей среды (LMS Moodle «Цифровое обучение») или иных информационных систем, сервисов и мессенджеров]

## 6.3. Программное обеспечение, современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы

### 6.3.1. Программное обеспечение

#### Перечень программного обеспечения на 2022–2023 учебный год

| Наименование программного обеспечения                                                   | Назначение                                     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------|
| Adobe Reader                                                                            | Программа для просмотра электронных документов |
| Платформа дистанционного обучения LMS Moodle                                            | Виртуальная обучающая среда                    |
| Mozilla FireFox                                                                         | Браузер                                        |
| Microsoft Office 2013,<br>Microsoft Office Project 2013,<br>Microsoft Office Visio 2013 | Пакет офисных программ                         |
| 7-zip                                                                                   | Архиватор                                      |
| Microsoft Windows 7 Professional                                                        | Операционная система                           |
| Kaspersky Endpoint Security                                                             | Средство антивирусной защиты                   |
| Google Chrome                                                                           | Браузер                                        |
| Notepad++                                                                               | Текстовый редактор                             |

|            |                                                     |
|------------|-----------------------------------------------------|
| OpenOffice | Пакет офисных программ                              |
| Opera      | Браузер                                             |
| Paint .NET | Растровый графический редактор                      |
| WinDjView  | Программа для просмотра файлов в формате DJV и DjVu |

### 6.3.2. Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы

| <i>Наименование современных профессиональных баз данных, информационных справочных систем</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |  |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| Универсальная справочно-информационная полнотекстовая база данных периодических изданий ООО « <a href="http://dlib.eastview.com">http://dlib.eastview.com</a><br>Имя пользователя: AstrGU<br>Пароль: AstrGU                                                                                                                                                                                                                                |  |
| Электронные версии периодических изданий, размещённые на сайте информационных ресурсов <a href="http://www.polpred.com">www.polpred.com</a>                                                                                                                                                                                                                                                                                                |  |
| Электронный каталог Научной библиотеки АГУ на базе MARK SQL НПО «Информ-систем»<br><a href="https://library.asu.edu.ru/catalog/">https://library.asu.edu.ru/catalog/</a>                                                                                                                                                                                                                                                                   |  |
| Электронный каталог «Научные журналы АГУ»<br><a href="https://journal.asu.edu.ru/">https://journal.asu.edu.ru/</a>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |  |
| Корпоративный проект Ассоциации региональных библиотечных консорциумов (АРБИКОН) «Межрегиональный проект статей» (МАРС) – сводная база данных, содержащая полную аналитическую роспись 1800 названий журналов. Участники проекта предоставляют друг другу электронные копии отсканированных статей из книг, сборников, фондах их библиотек.<br><a href="http://mars.arbicon.ru">http://mars.arbicon.ru</a>                                 |  |
| Справочная правовая система КонсультантПлюс.<br>Содержится огромный массив справочной правовой информации, российское и региональное законодательство, финансовые и кадровые консультации, консультации для бюджетных организаций, комментарии законодательства, проекты нормативных правовых актов, международные правовые акты, правовые акты, технические нормативы.<br><a href="http://www.consultant.ru">http://www.consultant.ru</a> |  |

## 7. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

### 7.1. Паспорт фонда оценочных средств

При проведении текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине «Теория функций комплексного переменного» проверяется сформированность у обучающихся компетенций, указанных в разделе 3 настоящей программы. Этапность формирования данных компетенций в процессе освоения образовательной программы определяется последовательным освоением дисциплин и прохождением практик, а в процессе освоения дисциплины – последовательным достижением результатов освоения содержательно связанных между собой разделов, тем.

**Таблица 6 – Соответствие разделов, тем дисциплины, результатов обучения по дисциплине и оценочных средств**

| Контролируемая тема дисциплины                      | Код контролируемой компетенции | Наименование оценочного средства |
|-----------------------------------------------------|--------------------------------|----------------------------------|
| Тема 1. Комплексные числа.                          | УК-1, ОПК-1                    | Коллоквиум, контрольная работа   |
| Тема 2. Функции комплексной переменной. Производная | УК-1, ОПК-1                    |                                  |
| Тема 3. Простейшие элементарные                     | УК-1, ОПК-1                    |                                  |

| Контролируемая тема дисциплины                  | Код контролируемой компетенции | Наименование оценочного средства |
|-------------------------------------------------|--------------------------------|----------------------------------|
| функции                                         |                                |                                  |
| Тема 4. Интеграл функции комплексной переменной | УК-1, ОПК-1                    |                                  |
| Тема 5. Ряды Тейлора и Лорана                   | УК-1, ОПК-1                    |                                  |
| Тема 6. Теория вычетов                          | УК-1, ОПК-1                    |                                  |

## 7.2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций, описание шкал оценивания

**Таблица 7 – Показатели оценивания результатов обучения в виде знаний**

| Шкала оценивания           | Критерии оценивания                                                                                                                                                                                                         |
|----------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 5<br>«отлично»             | демонстрирует глубокое знание теоретического материала, умение обоснованно излагать свои мысли по обсуждаемым вопросам, способность полно, правильно и аргументированно отвечать на вопросы, приводить примеры              |
| 4<br>«хорошо»              | демонстрирует знание теоретического материала, его последовательное изложение, способность приводить примеры, допускает единичные ошибки, исправляемые после замечания преподавателя                                        |
| 3<br>«удовлетворительно»   | демонстрирует неполное, фрагментарное знание теоретического материала, требующее наводящих вопросов преподавателя, допускает существенные ошибки в его изложении, затрудняется в приведении примеров и формулировке выводов |
| 2<br>«неудовлетворительно» | демонстрирует существенные пробелы в знании теоретического материала, не способен его изложить и ответить на наводящие вопросы преподавателя, не может привести примеры                                                     |

**Таблица 8 – Показатели оценивания результатов обучения в виде умений и владений**

| Шкала оценивания           | Критерии оценивания                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|----------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 5<br>«отлично»             | демонстрирует способность применять знание теоретического материала при выполнении заданий, последовательно и правильно выполняет задания, умеет обоснованно излагать свои мысли и делать необходимые выводы                                                                         |
| 4<br>«хорошо»              | демонстрирует способность применять знание теоретического материала при выполнении заданий, последовательно и правильно выполняет задания, умеет обоснованно излагать свои мысли и делать необходимые выводы, допускает единичные ошибки, исправляемые после замечания преподавателя |
| 3<br>«удовлетворительно»   | демонстрирует отдельные, несистематизированные навыки, испытывает затруднения и допускает ошибки при выполнении заданий, выполняет задание по подсказке преподавателя, затрудняется в формулировке выводов                                                                           |
| 2<br>«неудовлетворительно» | не способен правильно выполнить задания                                                                                                                                                                                                                                              |

## 7.3. Контрольные задания и иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения по дисциплине

### Тема 1. Комплексные числа.

**КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1**

1. Вычислить а)  $\frac{(1+i)^5}{(2-3i)^3}$ , б)  $\sqrt[3]{-2+2i}$ .
2. Вычислить сумму  $\cos \alpha - \cos 2\alpha + \cos 3\alpha - \dots + \cos 99\alpha$ .
3. Используя определение доказать, что последовательность  $(z_n)$ ,  $z_n = \frac{n^2 + 3i}{n^2 - 2i}$  имеет предел  $c = 1$ .
4. Установить является ли ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(3i)^n}$  сходящимся, абсолютно сходящимся.  
Найти сумму ряда  $\frac{1}{3} \sin \alpha + \frac{1}{9} \sin 3\alpha + \frac{1}{27} \sin 5\alpha + \dots$

**Тема 2. Функции комплексной переменной. Производная.****Тема 3. Простейшие элементарные функции.****КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2**

1. В каких точках комплексной плоскости функция  $w = \cos x + i \sin y$  имеет производную? Найдите эту производную.
2. Дана функция  $f(z) = z^3$ . Вычислить значение  $f'(z)$  в точке  $z_0 = 1+i$ , ее модуль и аргумент.
3. Исследование дифференцируемости функции, вычисление производной.

**КОЛЛОКВИУМ №1**

1. Функции комплексного переменного как две вещественные функции двух вещественных переменных.
2. Предел и непрерывность функции комплексного переменного в точке.
3. Простейшие элементарные функции: линейная функции.
4. Простейшие элементарные функции: дробно-линейная функция.
5. Простейшие элементарные функции: показательная и логарифмическая функции.
6. Простейшие элементарные функции: степенная функция, функция Жуковского.
7. Производная функция комплексного переменного.
8. Аналитические функции. Условия Коши-Римана и гармонические функции.

Дифференцирование элементарных функций.

**Тема 5. Интеграл функции комплексного переменного.****Тема 7. Ряды Тейлора и Лорана.****Тема 8. Теория вычетов.****КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3**

1. Дана функция  $f(z) = e^z$ .

Вычислить интеграл,  $\int_i \operatorname{Re}(z) dz$

где:

а)  $l$  - прямая, соединяющая точки  $z_1 = 0$  и  $z_2 = 1+i$ ;

б)  $l$  - ломаная  $OBA$ ,  $O(0,0)$ ,  $B(1,0)$ ,  $A(1,1)$ .

$$\int_0^i \sin^2 z \, dz.$$

2. Вычислить интеграл от аналитической функции

$$f(z) = \frac{z^3 - 1}{(z^3 + 1)(z^3 + i)}$$

3. Найти все конечные особые точки функции

4. Разложить по степеням  $(z-3)$  функцию  $f(z) = \sin z$ .

5. Разложить функцию  $f(z) = \frac{z+2}{z^2 - 2z - 3}$  в ряд Лорана по степеням  $z$ .

6. Вычислить вычет функции  $f(z)$  в точке  $z = 0$ ,  $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ .

7. Вычислить интеграл  $\oint_{|z-1|=1} \frac{z}{e^z - i} \, dz$ .

8. Найти изображения заданных функций-оригиналов  $f(x) = ax$  и  $f(x) = \exp(-x)$ .

## КОЛЛОКВИУМ №2

1. Интеграл от функции комплексного переменного.
2. Интеграл Коши и интегральная формула Коши.
3. Степенные ряды: аналитические функции и их разложения в степенные ряды.
4. Свойства максимума модуля аналитических и гармонических функций.
5. Изолированные особые точки аналитических функций и их классификация.
6. Ряд Лорана.
7. Изучение аналитических функций в окрестности бесконечно удаленной точки.
8. Вычеты и основная теорема о вычетах. Применения к вычислению интегралов. Лемма Жордана.
9. Конформные отображения односвязных областей. Теорема Римана (без доказательства).
10. Преобразование Лапласа и понятие об операционном исчислении.

### Перечень вопросов и заданий, выносимых на экзамен

1. Функции комплексного переменного: функции комплексного переменного.
2. Предел и непрерывность функции комплексного переменного в точке.
3. Простейшие элементарные функции: линейная функции.
4. Простейшие элементарные функции: дробно-линейная функция.

5. Простейшие элементарные функции: показательная и логарифмическая функции.
6. Простейшие элементарные функции: степенная функция, функция Жуковского.
7. Производная функция комплексного переменного.
8. Аналитические функции. Условия Коши-Римана и гармонические функции.
9. Дифференцирование элементарных функций.
10. Интеграл от функции комплексного переменного.
11. Интеграл Коши и интегральная формула Коши.
12. Степенные ряды: аналитические функции и их разложения в степенные ряды.
13. Свойства максимума модуля аналитических и гармонических функций.
14. Изолированные особые точки аналитических функций и их классификация.
15. Ряд Лорана.
16. Изучение аналитических функций в окрестности бесконечно удаленной точки.
17. Вычеты и основная теорема о вычетах. Применения к вычислению интегралов. Лемма Жордана.
18. Конформные отображения односвязных областей. Теорема Римана (без доказательства).
19. Преобразование Лапласа и понятие об операционном исчислении.

**Таблица 9 – Примеры оценочных средств с ключами правильных ответов**

| № п/п                                                                                                                                    | Тип задания            | Формулировка задания                                                                                                                                                                                                                                   | Правильный ответ | Время выполнения (в минутах) |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|------------------------------|
| УК-1: способность осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач. |                        |                                                                                                                                                                                                                                                        |                  |                              |
|                                                                                                                                          | Задание закрытого типа | Найти модуль и аргумент числа $-3 + i\sqrt{3}$ .<br>1) $-6, \pi$<br>2) $2\sqrt{3}, \frac{5\pi}{6}$<br>3) $3\sqrt{3}, \frac{\pi}{12}$                                                                                                                   | 2                | 5                            |
| 1.                                                                                                                                       |                        | Найти множество точек на комплексной $z$ -плоскости, удовлетворяющих условию $ z+1-i =1$ .<br>1) Горизонтальная прямая, проходящая через точку $1-i$<br>2) Круг радиуса 1 с центром в точке $-1+i$<br>3) Окружность радиуса 1 с центром в точке $-1+i$ | 3                | 3                            |
| 2.                                                                                                                                       |                        | Записать число $-1 - i\sqrt{3}$ в показательной форме.<br>1) $2 \exp(-\frac{i\pi}{3})$<br>2) $-2 \exp i$                                                                                                                                               | 1                | 10                           |

| №<br>п/п | Тип<br>задания | Формулировка задания                                                                                                                                                                                                                      | Правильный<br>ответ | Время<br>выполнения<br>(в минутах) |
|----------|----------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|------------------------------------|
|          |                | $3)\sqrt{2} \exp\left(-\frac{i3\pi}{4}\right)$                                                                                                                                                                                            |                     |                                    |
| 3.       |                | Вычислить интеграл<br>$\int_C \bar{z} dz$ по отрезку $C$ прямой,<br>соединяющей точки $0$ и $z = 3 + 2i$ .<br>1) $6i$ , 2) $\frac{13}{2}$ , 3) $0$ .                                                                                      | 2                   | 15                                 |
| 4.       |                | Найти изолированные особые<br>точки функции<br>$\frac{1}{z^2 + 4}$ и выяснить их характер<br>1) Существенно особые точки<br>$0$ и $1$ .<br>2) Устранимые особые точки<br>$z_1 = 2i, z_2 = -2i$<br>3) Простые полюсы $z_1 = 2i, z_2 = -2i$ | 3                   | 15                                 |

| №<br>п/п                                                                                                                                 | Тип<br>задания               | Формулировка задания                                                                             | Правильный<br>ответ                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | Время<br>выполнения<br>(в минутах) |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------|
| УК-1: способность осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач. |                              |                                                                                                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                    |
| 5.                                                                                                                                       | Задание<br>открытого<br>типа | Справедливо ли равенство<br>$\operatorname{Ln} z + \operatorname{Ln} z = 2\operatorname{Ln} z$ ? | Нет, не справедливо.<br>$\operatorname{Ln} z$ - это бесконечное<br>числовое множество и<br>поэтому левая сторона<br>- это множество,<br>каждое число которого<br>есть сумма<br>произвольного числа<br>из первого слагаемого<br>и произвольного<br>(вообще говоря,<br>другого) числа из<br>второго. А правая<br>сторона равенства<br>получается сложением<br>равных чисел. | 20                                 |
| 6.                                                                                                                                       |                              | Найти радиус сходимости ряда<br>Тейлора по степеням $z - 2$<br>функции $\frac{1}{z}$ .           | Эта функция<br>аналитична в точке<br>$z = 2$ , а ближайшей<br>особой точкой<br>является точка $z = 0$ .<br>Расстояние между<br>этими точками равно                                                                                                                                                                                                                        | 15                                 |

| №<br>п/п | Тип<br>задания | Формулировка задания                                                                          | Правильный<br>ответ                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | Время<br>выполнения<br>(в минутах) |
|----------|----------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------|
|          |                |                                                                                               | 2. Поэтому $R=2$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                    |
| 7.       |                | Существует ли логарифм числа нуль и логарифм отрицательного числа? Сколько значений он имеет? | Логарифм числа $w$ - это множество решений уравнения $\exp z = w$ .<br>Комплексная экспонента принимает все комплексные значения, кроме нуля. Поэтому логарифм нуля не существует, а логарифм отрицательного числа, как и любого ненулевого комплексного числа, существует. Так как экспонента - это периодическая функция, то логарифм имеет бесконечно много значений. | 15                                 |

| №<br>п/п                                                                                                                                 | Тип<br>задания         | Формулировка задания                                                                                     | Правильный<br>ответ                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | Время<br>выполнения<br>(в минутах) |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------|
| УК-1: способность осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач. |                        |                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                    |
| 8.                                                                                                                                       | Задание открытого типа | В каких точках комплексной плоскости не существует предел функции $\arg z$ (главное значение аргумента)? | В вещественных точках $z \leq 0$ .<br>Действительно, предел в точке $z=0$ зависит от направления, по которому идёт приближение к нулю. Это противоречит определению предела. Для отрицательных $z$ предел аргумента равен $\pi$ , если приближение происходит из верхней полуплоскости, и равен $-\pi$ , если из нижней. Это несовместимо с пониманием предела. | 15                                 |

| №<br>п/п | Тип<br>задания | Формулировка задания                                                                                                 | Правильный<br>ответ                                                                                                                                                                                                                                    | Время<br>выполнения<br>(в минутах) |
|----------|----------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------|
| 9.       |                | Комплексные $\sin z$ и $\cos z$ неограниченные функции. Не противоречит ли это тождеству $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ ? | Противоречие не возникает. Слагаемые в левой стороне - это комплексные числа $s$ , быть может, большими модулями. Они изображаются векторами большой длины. Эти вектора складываются по правилу параллелограмма. При этом диагональ его имеет длину 1. | 10                                 |

| №<br>п/п                                                                                                                                          | Тип<br>задания               | Формулировка задания                                                                                                                                                                                                                                                           | Правильный<br>ответ | Время<br>выполнения<br>(в минутах) |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|------------------------------------|
| ОПК-1. Способность применять базовые знания в области физико-математических и (или) естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности |                              |                                                                                                                                                                                                                                                                                |                     |                                    |
| 10.                                                                                                                                               | Задание<br>закрытого<br>типа | Найти все значения выражения $1/\sqrt{2}$ .<br>1) 1;<br>2) $\cos(2k\pi\sqrt{2}) + i \sin(2k\pi\sqrt{2})$ , $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ .<br>3) $\sqrt{2}$ .                                                                                                                     | 2                   | 15                                 |
| 11.                                                                                                                                               |                              | Определить, какая линия задана:<br>$z=a(\cos t + i \sin t)$ , $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$ , $a > 0$ .<br>1) Прямая, проходящая через точку $a$ .<br>2) Окружность радиуса $a$ с центром в точке $t$ .<br>3) Левая полуокружность с центром в нуле радиуса $a$ . | 3                   | 10                                 |
| 12.                                                                                                                                               |                              | Определить радиус сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ .<br>1) 1;<br>2) 0;<br>3) $\infty$ .                                                                                                                                                                     | 1                   | 10                                 |
| 13.                                                                                                                                               |                              | Исследовать поведение ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ на границе круга сходимости.<br>1) Всюду на границе сходится.<br>2) Всюду расходится.<br>3) Сходится в точке $z = -1$ , в                                                                                       | 4                   | 15                                 |

| № п/п | Тип задания | Формулировка задания                                                                                                                                           | Правильный ответ | Время выполнения (в минутах) |
|-------|-------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|------------------------------|
|       |             | остальных расходится.<br>4) Расходится в точке $z = 1$ , в остальных сходится.                                                                                 |                  |                              |
| 14.   |             | Найти особые точки функции $\frac{1-\cos z}{z^2}$ .<br>1) $z = 0$ - полюс кратности 2.<br>2) $z = 0$ - простой полюс.<br>3) $z = 0$ - устранимая особая точка. | 3                | 10                           |

| № п/п                                                                                                                                             | Тип задания            | Формулировка задания                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | Правильный ответ                                                                                                                                                                                 | Время выполнения (в минутах) |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------|
| ОПК-1. Способность применять базовые знания в области физико-математических и (или) естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности |                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                  |                              |
| 16.                                                                                                                                               | Задание открытого типа | Функция $\sin \frac{1}{1-z}$ имеет бесконечную последовательность нулей, сходящуюся к точке $z = 1$ , но тем не менее эта функция отлична от постоянной 0. Нет ли здесь противоречия с теоремой единственности?                                                                                                                                                                                                                   | Противоречия нет, ибо эта последовательность нулей $z_n = 1 - \frac{1}{\pi n}$ имеет предел 1, лежащий вне области аналитичности функции. Условия теоремы единственности не выполнены.           | 5                            |
| 17.                                                                                                                                               |                        | По признаку Вейерштрасса ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nz)}{n^2}$ равномерно сходится на вещественной оси. По теореме Вейерштрасса это должно означать, что ряд можно дифференцировать любое число раз. При этом должны получаться равномерно сходящиеся ряды. Однако уже ряд из вторых производных $-\sum_{n=1}^{\infty} \cos nz$ заведомо расходится в точке $z = 0$ . Нет ли здесь противоречия с теоремой Вейерштрасса? | Противоречия нет, ибо эта теорема требует, чтобы ряд сходился равномерно не на линии, а в области. Данное условие заведомо не выполнено, так как для всех комплексных $z$ данный ряд расходится. | 10                           |
| 18.                                                                                                                                               |                        | Выражение $a^b$ определяется как $\exp(b \operatorname{Ln} a)$ , а так как $\operatorname{Ln} a$ имеет бесконечно много значений, то и $a^b$ имеет бесконечно много значений. Какие значения, кроме $z \cdot z$ ,                                                                                                                                                                                                                 | Других значений нет. Действительно, $\operatorname{Ln} z$ - это множество чисел, отличающихся друг от друга на $2\pi i$ . $2 \operatorname{Ln} z$ - это множество чисел,                         | 15                           |

| № п/п | Тип задания | Формулировка задания    | Правильный ответ                                                                                                                                   | Время выполнения (в минутах) |
|-------|-------------|-------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------|
|       |             | имеет выражение $z^2$ ? | отличающихся на $4\pi i$ . А это один из периодов экспоненты. Поэтому $z^2$ имеет одно значение, впрочем, как и любая степень с целым показателем. |                              |

| п/п                                                                                                                                               | Тип задания            | Формулировка задания                                                              | Правильный ответ                                                                                                                                                                                                                                                                                 | Время выполнения (в минутах) |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------|
| ОПК-1. Способность применять базовые знания в области физико-математических и (или) естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности |                        |                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                              |
| 19.                                                                                                                                               | Задание открытого типа | Найти круг сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(2+i)^n}$ . | Этот ряд не только степенной, но является также геометрической прогрессией с множителем $\frac{z}{2+i}$ . Условие её сходимости $\left  \frac{z}{2+i} \right  < 1$ , т.е. $ z  < \sqrt{5}$ . Это круг с центром в точке $z = 0$ радиуса $\sqrt{5}$ .                                             | 5                            |
| 20.                                                                                                                                               |                        | Определить все нули функции $z \sin z$ , и определить их порядки.                 | Множитель $z$ имеет единственный простой нуль в начале координат. Множитель $\sin z$ имеет простые нули в точках $\pi k$ . При $k = 0$ нули множителей совпадают и получается нуль порядка 2. Итак, нули функции - это точки $\pi k$ . При $k = 0$ имеем нуль порядка 2, остальные нули простые. | 10                           |

Полный комплект оценочных материалов по дисциплине (фонд оценочных средств) хранится в электронном виде на кафедре, утверждающей рабочую программу дисциплины, и в Центре мониторинга и аудита качества обучения.

#### 7.4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине

Оценка результата освоения дисциплины производится на основе результатов выполнения трёх контрольных работ и ответов на двух коллоквиумах.

Количество баллов, которые можно заработать за успешное выполнение одной контрольной работы равно 10.

Максимальное количество баллов за успешный ответ на коллоквиуме равно 25.

На итоговом экзамене можно получить 50 баллов.

Если суммарное количество баллов равно или превышает 100, то выставляется оценка “отлично” (100 баллов).

**Таблица 12 – Шкала перевода рейтинговых баллов в итоговую оценку за семестр по дисциплине**

| Сумма баллов | Оценка по 4-балльной шкале |
|--------------|----------------------------|
| 90–100       | 5 (отлично)                |
| 70- 89       | 4 (хорошо)                 |
| 60-69        | 3 (удовлетворительно)      |
| Ниже 60      | 2 (неудовлетворительно)    |

При реализации дисциплины в зависимости от уровня подготовленности обучающихся могут быть использованы иные формы, методы контроля и оценочные средства, исходя из конкретной ситуации.

## **8. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ**

### **8.1. Основная литература**

1. Краснов М.Л. Функции комплексного переменного: Задачи и примеры с подробными решениями: доп. М-вом высшего и среднего специального образования СССР в качестве учеб. пособ. для вузов / М. Л. Краснов, Киселев, А.И. Макаренко, Г.И. - изд. 4-е ; испр. - М. : Ком Книга, 2006. - 208 с. - (Вся высшая математика в задачах). - ISBN 5-484-00462-4: 124-70. – 124.
2. Крупин В.Г., Павлов А.Л., Попов Л.Г. Высшая математика. Теория функций комплексного переменного. Операционное исчисление. Сборник задач с решениями. Издательский дом МЭИ. 2019. URL: [http://www.studentlibrary.ru/catalogue/switch\\_kit/x2017-071.html](http://www.studentlibrary.ru/catalogue/switch_kit/x2017-071.html) (ЭБС «Политехресурс» «Консультант студента»)
3. Курс высшей математики: Теория функций комплексной переменной: учеб. пособ.: лекции и практикум. - под общ. ред. И.М. Петрушко. - СПб.: Лань, 2010. - 368 с.: ил. - (Учебники для вузов. Специальная литература). - ISBN 978-5-8114-1064- 4: 419-98.
4. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного: : учебник для вузов / И. И. Привалов. — М. : Издательство Юрайт, 2018. — 402 с. — (Серия : Авторский учебник). — ISBN 978-5-534-01450-1.

### **8.2. Дополнительная литература**

5. Лунц Г.Л. Функции комплексного переменного с элементами операционного исчисления / Г. Л. Лунц, Л. Э. Эльсгольц. - СПб.: Лань, 2002. - 304 с. - ISBN 5-8114-0457-3: 75-00.
6. Половинкин Е.С. Курс лекций по теории функций комплексного переменного / Е. С. Половинкин. - М.: Физматкнига; МФТИ, 2003. - 208 с. - ISBN 5-89155-115-9 : 121-00.
7. Сидоров Ю.В. Лекции по теории функций комплексного переменного: Учебник для студ. физ.-математич. спец. вузов / Ю. В. Сидоров, М. В. Федорюк, М. И. Шабунин. - 2-е изд.; перераб. и доп. - М.: Наука, 1982. - 488 с. - 1-20.

8. Теория функций комплексной переменной: учебник, авторы: Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Издательство: ФИЗМАТЛИТ, 2010 г.
9. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. В 2-х ч. Ч.1. Функции одного переменного: Рек. УМС по математике УМО по классическому университетскому образованию в качестве учебника для ун-тов «Математика», «Механика» / Б. В. Шабат. - 4-е изд.; стеротип. - Спб.: Лань, 2005. - 336 с. - (Классический университетский учебник. МГУ им. М.В. Ломоносова). - ISBN 5-8114-0568-5: 341-00.
10. Шабунин М. Теория функций комплексного переменного: Рек. М-вом образования РФ в качестве учеб. для вузов / М. Шабунин, Ю. Сидоров. - М.: ЛБЗ Юнимедиастилл, 2002. - 248 с. - (Технический университет). - ISBN 5-94774-005-2 : 81-56.

### **8.3. Интернет-ресурсы, необходимые для освоения дисциплины**

1. Электронная библиотека «Астраханский государственный университет» собственной генерации на платформе ЭБС «Электронный Читальный зал – БиблиоТех». <https://biblio.asu.edu.ru>
2. Электронно-библиотечная система (ЭБС) ООО «Политехресурс» «Консультант студента». [www.studentlibrary.ru](http://www.studentlibrary.ru)

## **9. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ**

Для освоения дисциплины необходима аудитория с хорошей доской.

Рабочая программа дисциплины при необходимости может быть адаптирована для обучения (в том числе с применением дистанционных образовательных технологий) лиц с ограниченными возможностями здоровья, инвалидов. Для этого требуется заявление обучающихся, являющихся лицами с ограниченными возможностями здоровья, инвалидами, или их законных представителей и рекомендации психолого-медико-педагогической комиссии. Для инвалидов содержание рабочей программы дисциплины может определяться также в соответствии с индивидуальной программой реабилитации инвалида (при наличии).