

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Астраханский государственный университет имени В. Н. Татищева»
(Астраханский государственный университет им. В. Н. Татищева)

СОГЛАСОВАНО
Руководитель ОПОП
А.М. Лихтер

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой МиМП
 И.А. Байгушева

«02» 06 2022 г.

«02» 06 2022 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Векторный и тензорный анализ

наименование

Составитель(-и)

**Шацков Д.О., к.ф.-м.н., доцент кафедры
математики и методики её преподавания**

Направление подготовки

03.03.02 Физика

Направленность (профиль) ОПОП

Инженерная физика

Квалификация (степень)

Бакалавр

Форма обучения

Очная

Год приема (курс)

2021

Курс

2

Семестр(ы)

3

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

1.1 Цели освоения дисциплины

Целью освоения дисциплины «Векторный и тензорный анализ» является освоение студентами одного из наиболее важных для физической науки разделов математики – векторного и тензорного анализа.

Курс «Векторный и тензорный анализ» позволяет студентам овладеть фундаментальными понятиями и методами современной математики, без знания которых невозможна дальнейшая профессиональная подготовка. При освоении данного курса у студентов формируются навыки грамотной постановки научных задач, решения задач с применением математического аппарата, систематизации полученных знаний.

1.2 Задачи освоения дисциплины (модуля): получение базовых знаний по избранным главам некоторых разделов математики, а именно, векторного анализа и тензорной алгебры.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ) В СТРУКТУРЕ ОПОП

2.1. Учебная дисциплина (модуль) «Векторный и тензорный анализ» относится к обязательной (базовой) части и осваивается в 3 семестре.

2.2. Для изучения данной учебной дисциплины (модуля) необходимы следующие знания, умения и навыки, формируемые предшествующими учебными дисциплинами (модулями):

- математический анализ

Знания: алгебры, аналитической геометрии и математического анализа.

Умения: вычислять производные и интегралы.

Навыки: построение трехмерных фигур.

2.3. Последующие учебные дисциплины (модули) и (или) практики, для которых необходимы знания, умения и навыки, формируемые данной учебной дисциплиной (модулем):

- электричество и магнетизм;

- квантовая теория.

3. ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

Процесс освоения дисциплины (модуля) направлен на формирование элементов следующей(их) компетенции(ий) в соответствии с ФГОС ВО и ОПОП ВО по данному направлению подготовки / специальности:

- способен применять базовые знания в области физико-математических и (или) естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности (ОПК-1);
- способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач (УК-1).

Таблица 1 - Декомпозиция результатов обучения

Код и наименование компетенции	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю)		
	Знать	Уметь	Владеть
способен применять базовые знания в области физико-математических и (или) естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности (ОПК-1)	ОПК-1.1 использовать знания об окружающем мире и физических законах для изучения	ОПК-1.2 интерпретировать данные экспериментов на основании изучения свойств вещества и	ОПК-1.3 навыками проведения физических исследований различных материалов с

	различных природных явлений.	механизмов процессов, протекающих в окружающем мире.	использованием имеющихся методик.
способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач (УК-1)	УК-1.1. методики поиска, сбора и обработки информации, метод системного анализа.	УК-1.2. применять методики поиска, сбора, обработки информации, системный подход для решения поставленных задач и осуществлять критический анализ и синтез информации, полученной из актуальных российских и зарубежных источников.	УК-1.3. методами поиска, сбора и обработки, критического анализа и синтеза информации, методикой системного подхода для решения поставленных задач.

4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Общая трудоемкость дисциплины составляет 72 часа, 2 зачетных единицы. Из них 38 часов отводится на аудиторные занятия (19 ч. лекций, 38 ч. практических занятий), 15 часа – на самостоятельное изучение дисциплины.

Таблица 2 - Структура и содержание дисциплины (модуля)

Раздел, тема дисциплины (модуля)	Семестр	Контактная работа (в часах)			Самостоят. работа		Форма текущего контроля успеваемости, форма промежуточной аттестации [по семестрам]
		Л	ПР	ЛР	КР	СР	
Раздел I. Тензорный анализ							
Тема 1. Элементы тензорной алгебры.	3	3	6			2	опрос, проверка домашнего задания
Раздел II. Векторный анализ							
Тема 2. Векторная функция скалярного переменного.	3	4	8			2	Форма текущего контроля - опрос, проверка домашнего задания
Тема 3. Векторная функция многих скалярных аргументов.	3	3	6			2	Форма текущего контроля - опрос, проверка домашнего задания
Тема 4. Скалярное поле.	3	3	6			2	Форма текущего контроля - опрос, проверка домашнего

							задания
Тема 5. Векторное поле.	3	3	4			2	Форма текущего контроля - опрос, проверка домашнего задания
Тема 6. Введению в теорию векторных и тензорных полей на дифференцируемом многообразии	3	3	4			3	Форма текущего контроля - опрос, проверка домашнего задания
Контрольная работа	3	-	4			2	Контрольная работа по всем разделам
Итоговая аттестация	3						Экзамен
ИТОГО	3	19	38			15	

Примечание: Л – лекция; ПЗ – практическое занятие, семинар; ЛР – лабораторная работа; КР – курсовая работа; СР – самостоятельная работа.

Таблица 3 - Матрица соотнесения разделов, тем учебной дисциплины (модуля) и формируемых компетенций

Разделы, темы дисциплины (модуля)	Кол-во часов	Компетенции		
		ОПК 1	УК1	общее количество компетенций
<i>Раздел I. Тензорный анализ</i>	11	+	+	2
Тема 1. Элементы тензорной алгебры.	11	+	+	2
<i>Раздел II. Векторный анализ</i>	61	+	+	2
Тема 2. Векторная функция скалярного переменного.	14	+	+	2
Тема 3. Векторная функция многих скалярных аргументов.	11	+	+	2
Тема 4. Скалярное поле.	11	+	+	2
Тема 5. Векторное поле.	9	+	+	2
Тема 6. Введению в теорию векторных и тензорных полей на дифференцируемом многообразии	10	+	+	2
Контрольная работа	9	+	+	2
Итоговая аттестация	3	+	+	2
Итого	72			

Краткое содержание каждой темы дисциплины (модуля).

Раздел I. Тензорный анализ

Тема 1. Элементы тензорной алгебры

Векторы. Ковекторы. Линейные операторы. Теория инвариантов оператора. Полилинейные функции (формы). Свойства полилинейных кососимметрических форм. Представления билинейных и трилинейных кососимметрических форм. Понятие тензора типа (p,q) . Примеры.

Раздел II. Векторный анализ

Тема 2. Векторная функция скалярного переменного

Предел векторной функции скалярного переменного, формальные свойства. Непрерывность векторной функции скалярного переменного. Производная векторной функции скалярного переменного, выражение в координатах. Свойства производной. Годограф. Геометрический смысл производной векторной функции скалярного переменного. Понятие гладкой регулярной кривой. Длина дуги кривой. Длина дуги как натуральный параметр. Производная векторной функции по натуральному параметру.

Тема 3. Векторная функция многих скалярных аргументов

Векторная функция двух скалярных аргументов. Частные производные. Поверхность. Элементы дифференциальной геометрии поверхности: нормали и касательные. Первая квадратичная форма поверхности и ее применение.

Тема 4. Скалярное поле

Поверхности и линии уровня скалярного поля. Дифференцируемость скалярного поля, градиент. Производная скалярного поля по направлению. Связь градиента с производной по направлению. Алгебраические и геометрические свойства градиента. Вычисления градиента и производной по направлению в координатах. Система обозначений Гамильтона.

Тема 5. Векторное поле

Дифференцируемость векторного поля, дифференциальный оператор. Матрица дифференциального оператора в декартовых координатах. Производная векторного поля по направлению. Дивергенция векторного поля, свойства, вычисление в координатах. Поток векторного поля через поверхность. Теорема Гаусса-Остроградского. Выражение дивергенции через поток. Соленоидальные векторного поля и их признаки. Ротор векторного поля, его выражение в декартовых координатах и через гамильтониан. Формальные свойства ротора. Теорема Стокса. Потенциальные векторные поля. Различные признаки потенциальности. Некоторые полезные вычислительные формулы векторного анализа, в частности: дивергенция и ротор векторного произведения векторных полей, градиент скалярного произведения векторных полей.

Вычисления в криволинейных координатах.

Тема 6. Введение в теорию векторных и тензорных полей на дифференцируемом многообразии

Понятие дифференцируемого многообразия. Примеры. Векторные и тензорные поля на многообразии. Векторные расслоения. Элементы теории связности на многообразии. Дифференцирование векторных и тензорных полей на многообразии.

5. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРЕПОДАВАНИЮ И ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

5.1. Указания для преподавателей по организации и проведению учебных занятий по дисциплине (модулю)

При проведении лекционных и практических занятий предусматривается использование информационных технологий, включающих пакеты программ MathCad14. Данные программы,

в частности, используются для иллюстрации конических сечений, метода сечений при изучении различных фигур в пространстве.

Методические указания для преподавателей по освоению дисциплины

Исходя из цели и задач дисциплины необходимо сформировать у студентов готовность к изучению математических дисциплин в вузе, которая включает мотивационно-ценностный (учебная мотивация, осознание необходимости и ценности математических знаний для будущей профессиональной деятельности), содержательный (математические знания школьного курса математики, необходимые для изучения математических дисциплин в вузе), инструментальный (математические методы решения типовых задач школьного курса математики) и личностный (способность к коммуникации в совместной учебно-познавательной деятельности, упорство и способность к творчеству при решении математических задач) компоненты. В связи с этим:

1. Изучение дисциплины предваряет входное тестирование по математическому анализу, целью которого является выявление начального уровня готовности к изучению данной дисциплины и наиболее «проблемных» тем.
2. Ведущая роль отводится практическим занятиям (2 часа подряд еженедельно), на которых следует использовать интерактивные методы обучения: работа в малых группах, «равные обучают равных», «мозговой штурм», викторины, квесты и др.
3. Применять рейтинговую систему оценивания. После каждой контрольной работы доводить до сведения студентов их текущий рейтинг.
4. Завершается изучение дисциплины итоговым компьютерным тестированием, которое позволяет провести анализ достигнутого студентами уровня готовности к изучению математических дисциплин в вузе и в сравнении с результатами входного тестирования сделать вывод об эффективности обучения.

5.2. Указания для обучающихся по освоению дисциплины (модулю)

Для освоения дисциплины «Векторный и тензорный анализ» обучающемуся необходимо:

1. Уделять особое внимание работе на практических занятиях: участвовать в дискуссиях, работе в малых группах, добросовестно выполнять предлагаемые преподавателем упражнения и кейсы, проявлять творчество и инициативу.
2. Выполнять домашнюю работу по обобщению материала каждой изученной темы, составляя схемы и ментальные карты с помощью индивидуально разработанных средств кодирования информации.
3. Выполнять самостоятельную работу по дисциплине, которая заключается в выполнении домашних заданий в Рабочей тетради.

Таблица 4 - Содержание самостоятельной работы обучающихся

Вопросы, выносимые на самостоятельное изучение	Кол-во часов	Форма работы
<i>Раздел I. Тензорный анализ</i>		
Тема 1. Элементы тензорной алгебры.	2	чтение книг
<i>Раздел II. Векторный анализ</i>		чтение книг
Тема 2. Векторная функция скалярного переменного.	2	чтение книг
Тема 3. Векторная функция многих скалярных аргументов.	2	чтение книг
Тема 4. Скалярное поле.	2	чтение книг
Тема 5. Векторное поле.	2	чтение книг

Тема 6. Введению в теорию векторных и тензорных полей на дифференцируемом многообразии	3	чтение книг
Контрольная работа	2	чтение книг
Итоговая аттестация		

5.3. Виды и формы письменных работ, предусмотренных при освоении дисциплины, выполняемые обучающимися самостоятельно.

Индивидуальные (типовые) работы

6. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

6.1. Образовательные технологии

интерактивные лекции, групповые дискуссии

анализ ситуаций и имитационных моделей, равный обучает равного

проектные семинары

Таблица 5 – Образовательные технологии, используемые при реализации учебных занятий

№	Интерактивные формы	Описание
1	Лекция – визуализация.	Данный вид лекции является результатом нового использования принципа наглядности. Подготовка данной лекции преподавателем состоит в том, чтобы изменить, переконструировать учебную информацию по теме лекционного занятия в визуальную форму для представления студентам через технические средства обучения или вручную (схемы, рисунки, чертежи и т.п.). Чтение лекции сводится к связному, развернутому комментированию преподавателем подготовленных наглядных материалов, полностью раскрывающему тему данной лекции.
2	Проблемная лекция	На этой лекции новое знание вводится через проблемность вопроса, задачи или ситуации. При этом процесс познания студентов в сотрудничестве и диалоге с преподавателем приближается к исследовательской деятельности. Содержание проблемы раскрывается путем организации поиска ее решения. Лекция строится таким образом, чтобы обусловить появление вопроса в сознании студента. Учебный материал представляется в форме учебной проблемы. Она имеет логическую форму познавательной задачи, отмечающей некоторые противоречия в ее условиях и завершающейся вопросами, которые это противоречие объективирует. Проблемная ситуация возникает после обнаружения противоречий в исходных данных учебной проблемы. Учебные проблемы должны быть доступными по своей трудности для слушателей.

3	Лекция-беседа, или «диалог с аудиторией»	Лекция-беседа предполагает непосредственный контакт преподавателя с аудиторией. К участию в лекции-беседе можно привлечь различными приемами, так, например, активизация студентов вопросами в начале лекции и по ее ходу, как уже описывалось в проблемной лекции, вопросы могут, быть информационного и проблемного характера, для выяснения мнений и уровня осведомленности по рассматриваемой теме, степени их готовности к восприятию последующего материала. Вопросы адресуются всей аудитории. Слушатели отвечают с мест. Если преподаватель замечает, что кто-то из обучаемых не участвует в ходе беседы, то вопрос можно адресовать лично тому слушателю, или спросить его мнение по обсуждаемой проблеме.
4	Работа в малых группах	Парная и групповая работа реализуется как в системе аудиторных занятий (лекции, практические и семинарские занятия), так и в условиях самостоятельной подготовки студентов. Это может происходить сразу же после изложения нового материала, в начале последующего, вместо опроса, на практическом занятии, или может быть частью обобщающего итогового занятия.
5	Тестирование	контроль знаний с помощью тестов с открытыми и закрытыми вопросами для текущей и промежуточной аттестации, самоконтроля. Заключительная тема модуля может быть проведена в форме тестирования. Она позволяет выявить итоговый уровень подготовленности студента в зависимости от посещения им аудиторных занятий, выполнения практических заданий и самостоятельной работы.

6.2. Информационные технологии

- использование Интернета
- использование электронных учебников и различных сайтов (например, электронные библиотеки, журналы и т.д.) как источник информации
- использование возможностей электронной почты преподавателя
- использование средств представления учебной информации (электронных учебных пособий и практикумов, применение новых технологий для проведения очных (традиционных) лекций и семинаров с использованием презентаций и т.д.)
- использование интерактивных средств взаимодействия участников образовательного процесса (технологии дистанционного или открытого обучения в глобальной сети (веб-конференции, форумы, учебно-методические материалы и др.))
- использование интегрированных образовательных сред, где главной составляющей являются не только применяемые технологии, но и содержательная часть, т.е. информационные ресурсы (доступ к мировым информационным ресурсам, на базе которых строится учебный процесс)]

6.3. Перечень программного обеспечения и информационных справочных систем

6.3.1. Программное обеспечение

Наименование программного обеспечения	Назначение
Adobe Reader	Программа для просмотра электронных документов
Платформа дистанционного обучения LMS Moodle	Виртуальная обучающая среда
Mozilla FireFox	Браузер
Microsoft Office 2013, Microsoft Office Project 2013, Microsoft Office Visio 2013	Пакет офисных программ
7-zip	Архиватор
Kaspersky Endpoint Security	Средство антивирусной защиты

Google Chrome	Браузер
OpenOffice	Пакет офисных программ

6.3.2. Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы

Наименование современных профессиональных баз данных, информационных справочных систем
Электронный каталог Научной библиотеки АГУ на базе MARK SQL НПО «Информ-систем». https://library.asu.edu.ru
Электронный каталог «Научные журналы АГУ»: http://journal.asu.edu.ru/
Универсальная справочно-информационная полнотекстовая база данных периодических изданий ООО "ИБИС". http://dlib.eastview.com Имя пользователя: AstrGU Пароль: AstrGU
Справочная правовая система КонсультантПлюс. Содержится огромный массив справочной правовой информации, российское и региональное законодательство, судебную практику, финансовые и кадровые консультации, консультации для бюджетных организаций, комментарии законодательства, формы документов, проекты нормативных правовых актов, международные правовые акты, правовые акты, технические нормы и правила. http://www.consultant.ru

7. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

7.1. Паспорт фонда оценочных средств

При проведении текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю) «*Векторный и тензорный анализ*» проверяется сформированность у обучающихся компетенций, указанных в разделе 3 настоящей программы. Этапность формирования данных компетенций в процессе освоения образовательной программы определяется последовательным освоением дисциплин (модулей) и прохождением практик, а в процессе освоения дисциплины (модуля) – последовательным достижением результатов освоения содержательно связанных между собой разделов, тем.

Таблица 6 - Соответствие изучаемых разделов, результатов обучения и оценочных средств

Контролируемый раздел, тема дисциплины (модуля)	Код контролируемой компетенции (компетенций)	Наименование оценочного средства
Тензорный анализ	ОПК1, УК1	Контрольная работа Коллоквиум Тест
Векторный анализ	ОПК1, УК1	Контрольная работа Коллоквиум Тест

7.2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций, описание шкал оценивания

Таблица 7 - Показатели оценивания результатов обучения в виде знаний

Шкала оценивания	Критерии оценивания
5 «отлично»	демонстрирует глубокое знание теоретического материала, умение обоснованно излагать свои мысли по обсуждаемым вопросам, способность полно, правильно и аргументированно отвечать на вопросы, приводить примеры

4 «хорошо»	демонстрирует знание теоретического материала, его последовательное изложение, способность приводить примеры, допускает единичные ошибки, исправляемые после замечания преподавателя
3 «удовлетворительно»	демонстрирует неполное, фрагментарное знание теоретического материала, требующее наводящих вопросов преподавателя, допускает существенные ошибки в его изложении, затрудняется в приведении примеров и формулировке выводов
2 «неудовлетворительно»	демонстрирует существенные пробелы в знании теоретического материала, не способен его изложить и ответить на наводящие вопросы преподавателя, не может привести примеры

Таблица 8 - Показатели оценивания результатов обучения в виде умений и владений

Шкала оценивания	Критерии оценивания
5 «отлично»	демонстрирует способность применять знание теоретического материала при выполнении заданий, последовательно и правильно выполняет задания, умеет обоснованно излагать свои мысли и делать необходимые выводы
4 «хорошо»	демонстрирует способность применять знание теоретического материала при выполнении заданий, последовательно и правильно выполняет задания, умеет обоснованно излагать свои мысли и делать необходимые выводы, допускает единичные ошибки, исправляемые после замечания преподавателя
3 «удовлетворительно»	демонстрирует отдельные, несистематизированные навыки, испытывает затруднения и допускает ошибки при выполнении заданий, выполняет задание по подсказке преподавателя, затрудняется в формулировке выводов
2 «неудовлетворительно»	не способен правильно выполнить задание

7.3. Контрольные задания и иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения по дисциплине (модулю)

Примерные варианты контрольной работы Раздел «Векторная функция скалярного переменного».

Вариант 0

- 1). Продифференцировать векторную функцию $r(t)$: $\bar{r}(t) = [\bar{a}e^{\sin t} + \bar{b}, \sin e^{\sin t} \bar{a}]$, $\bar{a}, \bar{b}$ - постоянные векторы
- 2). Найти производную при $t = 0$ векторной функции $r(t) : \bar{r}(\sin t, \cos t, t)$
- 3). Найти градиент скалярного поля Φ : $\Phi = \bar{r}^2(\bar{a}\bar{r})$
- 4). Найти производную в точке M_0 по направлению к точке M_1 скалярного поля Φ : $\Phi = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $M_0(1,1,1)$, $M_1(3,2,1)$
- 5). Найти ротор векторного поля $\bar{V} = \bar{a}(\bar{b}\bar{r})$, $\bar{a}, \bar{b}$ - постоянные векторы
- 6). Является ли следующее поле соленоидальным? $\bar{V}(2y, -z, 2x)$

Раздел «Векторная функция многих скалярных аргументов».

Вариант 0

1. Пусть $\bar{r} = \bar{r}(t)$. Тогда производная по t от $[\bar{a}\bar{r}']$, где $\bar{a}$ - постоянный вектор, равна 1) $[\bar{a}'\bar{r}']$, 2) $[\bar{a}\bar{r}'] + [\bar{a}'\bar{r}]$, 3) $[\bar{a}\bar{r}']$, 4) другой ответ.

2. Уравнение касательной к кривой $\vec{r} = 4 \cos t \vec{i} + 4 \sin t \vec{j} + 3t \vec{k}$ в точке $t = 0$ имеет вид
- 1) $\frac{x-4}{0} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3}$; 2) $\frac{x}{4} = \frac{y-4}{0} = \frac{z-3}{3}$; 3) $\frac{x-4}{4} = \frac{y}{0} = \frac{z}{3}$; 4) другой ответ.
3. Градиент скалярного поля $\varphi = |\vec{r}|^n$ равен
- 1) $\frac{\vec{r}^0}{|\vec{r}|}$, 2) $n|\vec{r}|^{n-1}$, 3) $n|\vec{r}|^{n-1} \vec{r}^0$, 4) другой ответ.
4. Поверхность уровня скалярного поля $\varphi = 2x^2 + y^2 - 3z^2$ в точке $(1; -2; 0)$ представляет из себя
- 1) конус второго порядка, 2) однополостный гиперболоид, 3) двуполостный гиперболоид, 4) другой ответ.
5. Производная скалярного поля $\varphi = xyz$ в точке $(1; 1; 1)$ по направлению радиус-вектора этой точки равна
- 1) 3, 2) $\sqrt{3}$, 3) $\frac{1}{\sqrt{3}}$, 4) другой ответ.
6. Семейство силовых линий векторного поля $\vec{a} = x\vec{i} - y\vec{j}$ определяется уравнениями
- 1) $x + y = c$, 2) $\frac{x}{y} = c$, 3) $xy = c$, 4) другой ответ.
7. Дивергенция векторного поля $\vec{a} = (\vec{r} \cdot \vec{c})\vec{c}$, где $\vec{c}$ - постоянный вектор, равна
- 1) $\vec{c}^2$, 2) $\vec{r} \cdot \vec{c}$, 3) 0, 4) другой ответ.
8. При условии $\text{rot } \vec{r} = \vec{0}$, ротор векторного поля $\vec{a} = [[\vec{c}\vec{b}]\vec{r}]$, где $\vec{c}, \vec{b}$ - постоянные векторы, равен
- 1) $2[\vec{c}\vec{b}]$, 2) $2[\vec{b}\vec{c}]$, 3) $\vec{0}$, 4) другой ответ.
9. Векторное поле $\vec{a} = x(z^2 - y^2)\vec{i} + y(x^2 - z^2)\vec{j} + z(y^2 - x^2)\vec{k}$
- 1) соленоидально, но не потенциально, 2) потенциально, но не соленоидально, 3) не является соленоидальным и потенциальным, 4) другой ответ.
10. Потенциал поля $\vec{a} = 2xy\vec{i} + (x^2 - 2yz)\vec{j} - y^2\vec{k}$ равен
- 1) $x^2y + c$, 2) $x^2y - y^2z + c$, 3) поле не потенциально, 4) другой ответ.

Перечень вопросов и заданий, выносимых на экзамен

1. Предел векторной функции скалярного переменного, формальные свойства. Непрерывность векторной функции скалярного переменного.
2. Производная векторной функции скалярного переменного, выражение в координатах. Свойства производной.
3. Годограф. Геометрический смысл производной векторной функции скалярного переменного.
4. Понятие гладкой регулярной кривой. Длина дуги кривой. Длина дуги как натуральный параметр. Производная векторной функции по натуральному параметру.
5. Векторная функция двух скалярных аргументов. Частные производные. Поверхность и формы ее задания. Элементы дифференциальной геометрии поверхности: нормали и касательные к поверхности. Первая квадратичная форма поверхности и ее применение.

6. Скалярное поле. Поверхности и линии уровня скалярного поля. Дифференцируемость скалярного поля, градиент.
7. Производная скалярного поля по направлению. Связь градиента с производной по направлению.
8. Алгебраические и геометрические свойства градиента. Вычисления градиента и производной по направлению в координатах. Система обозначений Гамильтона.
9. Векторное поле. Дифференцируемость векторного поля, дифференциальный оператор. Матрица дифференциального оператора в декартовых координатах. Производная векторного поля по направлению.
10. Дивергенция векторного поля, свойства, вычисление в координатах. Поток векторного поля через поверхность. Теорема Гаусса-Остроградского. Выражение дивергенции через поток. Соленоидальные векторного поля и их признаки.
11. Ротор векторного поля, его выражение в декартовых координатах и через гамильтониан. Формальные свойства ротора. Теорема Стокса.
12. Потенциальные векторные поля. Различные признаки потенциальности.
13. Некоторые формулы векторного анализа: дивергенция и ротор векторного произведения векторных полей.
14. Некоторые формулы векторного анализа: градиент скалярного произведения векторных полей.
15. Вычисление дивергенции, ротора и градиента в криволинейных ортогональных системах координат.

Таблица 9 – Примеры оценочных средств с ключами правильных ответов

№ п/п	Тип задания	Формулировка задания	Правильный ответ	Время выполнения (в минутах)
способен применять базовые знания в области физико-математических и (или) естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности (ОПК-1)				
1.	Задание закрытого типа	Векторное произведение ненулевых векторов $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$ тогда и только тогда, когда:	$\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$	1
2.		Координаты вектора $\mathbf{AB}$, если $A(3,0,3)$, $B(-1,-4,3)$, равны	$(-4,-4,0)$	1
3.		Что такое тензор нулевого ранга?	Скаляр.	1
4.		Что такое тензор первого ранга?	Вектор.	1
5.		Что такое свертывание тензора?	Суммирование тензора по каким-либо двум индексам	1
6.	Задание открытого типа	Найти общее решение дифференциальных уравнений. $(xy + y)dx + (xy + x)dy = 0$	Попытаемся разделить переменные интегрирования. Для этого вынесем за скобки общий множитель: $y(x+1)dx + x(y+1)dy = 0$, разнесем слагаемые: $y(x+1)dx = -x(y+1)dy;$ выражая $\frac{dy}{dx}$ из полученного уравнения убедимся в том, что $\frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y)$ и, значит, наше уравнение является дифференциальным уравнением в разделяющихся переменных.	5

			Разделим переменные. $\left(\frac{1}{x} + 1\right) dx = -\left(\frac{1}{y} + 1\right) dy .$ Проинтегрируем получившееся выражение по соответствующим переменным: $\int \left(\frac{1}{x} + 1\right) dx = -\int \left(\frac{1}{y} + 1\right) dy .$ Получим $\ln x + x = -\ln y - y + \ln C ,$ $\Rightarrow \ln xy + \ln e^{x+y} = \ln C .$ Таким образом, мы убедились в том, что $xye^{x+y} = C$ - общий интеграл заданного уравнения.	
7.	Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y'' + 2y' - 3y = e^{2x}$ $y(0) = 1; y'(0) = 1$	$y'' + 2y' - 3y = e^{2x}$ - неоднородное линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами 2-ого порядка. Решение будем искать в виде суммы решений: общего решения однородного уравнения $\bar{y}$ и частного решения неоднородного уравнения y^*, которое будем искать по виду правой части. Начнем с отыскания $\bar{y}$. $y'' + 2y' - 3 = 0$ Составим характеристическое уравнение: $k^2 + 2k - 3 = 0; \quad k_1 = 1; k_2 = -3 .$ Следовательно, общее решение однородного уравнения: $\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-3x}$. y^* будем искать в виде $A \cdot e^{2x}$. y^* - частное решение уравнения, поэтому оно превращает его в верное числовое тождество. Подставим его в уравнение и вычислим A. $(y^*)' = 2Ae^{2x}; (y^*)'' = 4Ae^{2x} .$ $4Ae^{2x} + 4Ae^{2x} - 3Ae^{2x} = e^{2x} \Rightarrow A = 0,2 .$ Значит $y^* = 0,2e^{2x}$. Таким образом, общее решение неоднородного уравнения $y = \bar{y} + y^* = C_1 e^x + C_2 e^{-3x} + 0,2e^{2x}$. Для вычисления частного решения определим значения констант исходя из начальных условий: $y = C_1 e^x + C_2 e^{-3x} + 0,2e^{2x} ;$ $y' = C_1 e^x - 3C_2 e^{-3x} + 0,4e^{2x} ;$ $y(0) = 1; y'(0) = 1 ;$ $1 = C_1 e^0 + C_2 e^{-3 \cdot 0} + 0,2e^{2 \cdot 0} ;$ $1 = C_1 e^0 - 3C_2 e^{-3 \cdot 0} + 0,4e^{2 \cdot 0} ;$	5	

		$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 + 0,2 \\ 1 = C_1 - 3C_2 + 0,4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1 = 0.75 \\ C_2 = 0.05 \end{cases}$ Ответ: $y = 0.75 e^x + 0.05 e^{-3x} + 0,2 e^{2x}.$	
8.	Вычислить $\int_K (x + y) dL$, где (K) контур треугольника с вершинами $a(1, 0)$, $b(0, 1)$, $o(0,0)$	контур интегрирования (κ) разбит на три части oa, ab, bo, тогда криволинейный интеграл по данному контуру будет равен: $J = \int_K (x + y) dL =$ $\int_{OA} (x + y) dL + \int_{AB} (x + y) dL + \int_{BO} (x + y) dL$ УРАВНЕНИЕ (OA): $y = 0 \Rightarrow \dot{y} = 0, \quad 0 \leq x \leq 1$ УРАВНЕНИЕ (AB): $y = 1 - x \Rightarrow \dot{y} = -1, \quad 0 \leq x \leq 1$ УРАВНЕНИЕ (BO) $x = 0 \Rightarrow \dot{x} = 0, \quad 0 \leq y \leq 1$ $J = \int_0^1 (x + 0) \sqrt{1 + 0} dx +$ $\int_0^1 (x + 1 - x) \sqrt{1 + (-1)^2} dx + \int_0^1 (0 + y) \sqrt{1 + 0} dy =$ $= \int_0^1 x dx + \sqrt{2} \cdot \int_0^1 dx + \int_0^1 y dy = \frac{x^2}{2} \Big _0^1 +$ $\sqrt{2} \cdot x \Big _0^1 + \frac{y^2}{2} \Big _0^1 = \frac{1}{2} + \sqrt{2} + \frac{1}{2} = \sqrt{2} + 1.$ ОТВЕТ: $\int_K (x + y) dL = \sqrt{2} + 1.$	5
9.	ВЫЧИСЛИТЬ ИНТЕГРАЛ $\oint_L 2(x^2 + y^2) dx + (x + y)^2 dy$ ДВУМЯ СПОСОБАМИ: НЕПОСРЕДСТВЕННО И ПО ФОРМУЛЕ ГРИНА. L – КОНТУР МНОГОУГОЛЬНИКА $ABCA$: $A(1; 1)$, $B(2; 2)$, $C(1; 3)$	В НАШЕМ ПРИМЕРЕ $P(x, y) = 2(x^2 + y^2), \quad Q(x, y) = (x + y)^2,$ ТОГДА $\frac{\partial P}{\partial y} = 4y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2(x + y).$ ПОЛУЧАЕМ, ЧТО $J = \int_{ABCA} 2(x^2 + y^2) dx + (x + y)^2 = \iint_D (2(x - y)) dx dy$ ГДЕ ОБЛАСТЬ (D) – ТРЕУГОЛЬНИК ABC.	5

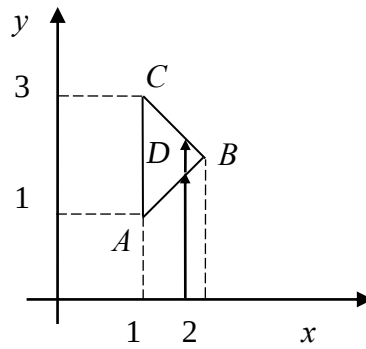


Рис. 6

**ЗАПИШЕМ УРАВНЕНИЕ СТОРОН
ТРЕУГОЛЬНИКА ABC .**

(AB): $y = x$, **(BC):** $y = 4 - x$,

(CA): $x = 1$

**ВЫЧИСЛИМ ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ ПО
ДАННОЙ ОБЛАСТИ (D):**

$$J = 2 \cdot \int_1^2 dx \int_x^{4-x} (x - y) dy = 2 \cdot \int_1^2 \left(xy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_x^{4-x} dx =$$

$$4 \cdot \int_1^2 (4x - x^2 - 4) dx =$$

$$= 4 \cdot \left(2x^2 - \frac{1}{3}x^3 - 4x \right) \Big|_1^2 = -\frac{4}{3}$$

**ВЫЧИСЛИМ ТЕПЕРЬ
НЕПОСРЕДСТВЕННО
КРИВОЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ ПО
КОНТУРУ ТРЕУГОЛЬНИКА ABC ,
СОСТОЯЩЕМУ ИЗ ЗВЕНЬЕВ: AB , BC ,
 CA .**

$$J = \int_{AB} 2 \cdot (x^2 + y^2) dx + (x + y)^2 dy + \int_{BC} 2 \cdot (x^2 + y^2) dx + (x + y)^2 dy +$$

$$+ \int_{CA} 2 \cdot (x^2 + y^2) dx + (x + y)^2 dy$$

УРАВНЕНИЕ (AB):

$$y = x \Rightarrow dy = dx, \quad 1 \leq x \leq 2$$

УРАВНЕНИЕ (BC):

$$y = 4 - x \Rightarrow dy = -dx, \quad 2 \geq x \geq 1$$

УРАВНЕНИЕ (CA):

$$x = 1 \Rightarrow dx = 0, \quad 3 \geq y \geq 1$$

ТАКИМ ОБРАЗОМ,

			$J = \int_1^2 8x^2 dx + \int_2^1 (4x^2 - 16x + 16) dx + \int_3^1 (1+y)^2 dy =$ $= \frac{56}{3} - \frac{4}{3} - \frac{56}{3} = -\frac{4}{3}$ РЕЗУЛЬТАТЫ ОДИНАКОВЫ. ОТВЕТ: $J = -\frac{4}{3}.$	
--	--	--	---	--

Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач (УК-1).

1.	Задание закрытого типа	Найти количество натуральных чисел, не превосходящих 1600 и взаимно простых с 45.	853	2
2.		Сколькими нулями оканчивается число 2012!?	2012! оканчивается 501 нулем	3
3.		Найти натуральное число n такое, что числа n , $n + 10$, $n + 14$ - простые.	$n = 3$, $n + 10 = 13$, $n + 14 = 17$	3
4.		Найти наибольшее натуральное число n , при котором дробь $A = \frac{101 \cdot 102 \cdot \dots \cdot 1000}{7^n}$ является целым числом.	$n = 148.$	3
5.		Решить сравнение $17x \equiv 13 \pmod{23}$	$x \equiv 17 \pmod{23}$	3
6.	Задание открытого типа	Доказать, что сумма квадратов двух последовательных натуральных чисел при делении на 4 дает остаток 1.	Возьмем два последовательных натуральных числа n и $n + 1$. Одно из них четное, а другое нечетное. Найдем сумму S их квадратов:. Если разделить S на 4, то в частном будет натуральное число $\frac{n(n+1)}{2}$, а в остатке 1.	5
7.		Если $p > 3$ - простое число, то его можно представить в виде $6n + 1$ или $6n - 1$, где n - натуральное число.	Разделим p на 6 с остатком: $p = 6q + r$. Поскольку p простое число, то остаток не может быть равен 2, 3 и 4. Остаются две возможности: $r = 1$ и $r = 5$. В первом случае $p = 6n + 1$, где $n = q$, а во втором случае $p = 6n - 1$, где $n = q + 1$.	5
8.		Доказать, что среди чисел вида $2p + 1$, где p - простое число, только одно	Данное число нечетное, поэтому оно является кубом нечетного числа: $2p + 1 = (2n + 1)^3$. Раскрывая это соотношение, получаем	5

		является точным кубом.	$p = n(4n^2 + 6n + 3)$. Так как p - простое число, то $n = 1$ и $p = 13$.	
9.		Доказать, что при $n > 2$ между числами n и $n!$ содержится по крайней мере одно простое число.	Если это утверждение неверно, то все простые числа, меньшие $n!$, будут также не больше, чем n . Рассмотрим число $n! - 1$. Оно составное и поэтому должно делиться на простые числа, которые не превосходят n . На эти же простые числа делится $n!$. Но два последовательных натуральных числа не могут иметь общих простых делителей, т.к. они взаимно простые.	5
10.		Доказать, что если натуральные числа при делении на m дают остаток 1, то их произведение при делении на m также дает остаток 1.	Достаточно доказать это для произведения двух чисел. Пусть $a = m \cdot s + 1$ и $b = m \cdot t + 1$. Тогда, т.е. частным от деления числа $a \cdot b$ на m будет $(m \cdot s \cdot t + s + t)$, а остатком 1.	5

7.4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

Преподаватель, реализующий дисциплину, в зависимости от уровня подготовленности обучающихся может использовать иные формы, методы контроля и оценочные средства, исходя из конкретной ситуации.

Таблица 10 – Технологическая карта рейтинговых баллов по дисциплине (модулю)

№ п/п	Контролируемые мероприятия	Количество мероприятий / баллы	Максимальное количество баллов	Срок представления
Основной блок				
1.	<i>Ответ на занятии</i>	3/1	3	в течении семестра
2.	<i>Выполнение практического задания</i>	7/1	7	в течении семестра
3.	<i>Выполнение контрольных работ</i>	3/10	30	в течении семестра
Всего			40	-
4.	<i>Посещение занятий</i>		5	
5.	<i>Своевременное выполнение всех заданий</i>		5	
Всего			10	-
Дополнительный блок**				
6.	<i>Экзамен</i>			
Всего			50	-
ИТОГО			100	-

Таблица 11 – Система штрафов (для одного занятия)

Показатель	Балл
Опоздание на занятие	-0,5
Нарушение учебной дисциплины	-1
Неготовность к занятию	-1
Пропуск занятия без уважительной причины	-1

Таблица 12 – Шкала перевода рейтинговых баллов в итоговую оценку за семестр по дисциплине (модулю)

Оценки по 4-балльной шкале		
Сумма баллов	Оценка по 4-балльной шкале	
90–100	5 (отлично)	Зачтено
85–89	4 (хорошо)	
75–84		
70–74		
65–69	3 (удовлетворительно)	
60–64		
Ниже 60	2 (неудовлетворительно)	Не зачтено

[Примечание: если в семестре итоговой формой контроля по дисциплине (модулю) является экзамен, графа со словами «Зачтено», «Не зачтено» не приводится]

При реализации дисциплины (модуля) в зависимости от уровня подготовленности обучающихся могут быть использованы иные формы, методы контроля и оценочные средства, исходя из конкретной ситуации.

8. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

8.1. Основная литература литература из ЭБС

1. Акивис М.А., Тензорное исчисление [Электронный ресурс]: Учеб. пособ. / Акивис М. А., Гольдберг В. В. - 3-е изд., перераб - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2011. - 304 с. - ISBN 5-9221-0424-1 - Режим доступа: <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN5922104241.html>
2. Гопенгауз, Б. Е. Основы тензорного анализа / Б. Е. Гопенгауз. - Москва : МИСиС, 2001. - 165 с. - Текст : электронный // ЭБС "Консультант студента"
URL: https://www.studentlibrary.ru/book/Misis_320.html - Режим доступа: по подписке.

8.2. Дополнительная литература

1. Киреев И.В., Тензорный анализ и дифференциальная геометрия [Электронный ресурс]: учеб. пособие / И.В. Киреев, Л.В. Кнауб, Д.В. Левчук, Я.Н. Нужин - Красноярск : СФУ, 2017. - 102 с. - ISBN 978-5-7638-3622-6 - Режим доступа: <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785763836226.html>

8.3. Интернет-ресурсы, необходимые для освоения дисциплины (модуля)

ЭБС "КОНСУЛЬТАНТ СТУДЕНТА" <http://www.studentlibrary.ru/>

9. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Лекционные занятия проводятся в аудиториях на 60-80 посадочных мест, практические занятия – на 20-30 посадочных мест. В отведенных для занятий аудиториях имеются учебные доски (большого размера) для визуализации информации.

Также в ходе лекционных и практических занятий применяются учебно-демонстрационные мультимедийные презентации, которые обеспечиваются следующим техническим оснащением:

1. Компьютеры (в комплекте с колонками)
2. Мультимедийный проектор
3. Экран.

Рабочая программа дисциплины (модуля) при необходимости может быть адаптирована для обучения (в том числе с применением дистанционных образовательных технологий) лиц с ограниченными возможностями здоровья, инвалидов. Для этого требуется заявление обучающихся, являющихся лицами с ограниченными возможностями здоровья, инвалидами, или их законных представителей и рекомендации психолого-медико-педагогической комиссии. Для инвалидов содержание рабочей программы дисциплины (модуля) может определяться также в соответствии с индивидуальной программой реабилитации инвалида (при наличии).