

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Астраханский государственный университет имени В. Н. Татищева»
(Астраханский государственный университет им. В. Н. Татищева)

СОГЛАСОВАНО
Руководитель ОПОП
А.М. Лихтер
«5» июня 2024 г.

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой физики
С.А. Тишкова
«6» июня 2024 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Компьютерная гидродинамика, теплофизика и прочность

Составитель(-и)	Исмухамбетова А.С., к.пед.наук, доцент, доцент кафедры физики;
Направление подготовки / специальность	03.03.02.ФИЗИКА
Направленность (профиль) ОПОП	Инженерная физика
Квалификация (степень)	бакалавр
Форма обучения	очная
Год приема	2021
Курс	4
Семестр	8

Астрахань-2024

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

1.1. Целями освоения дисциплины является получение будущими бакалаврами навыков работы с программными пакетами, выполняющими численные расчеты прикладных задач гидродинамики, теплофизики и прочности.

1.2. Задачи освоения дисциплины:

- изложение будущими бакалаврами принципов работы программных пакетов, позволяющих выполнять численные расчеты задач гидродинамики, теплофизики и прочности;
- освоение будущими бакалаврами методов применения рассматриваемых программных пакетов для расчета различных задач гидродинамики, теплофизики и прочности;
- приобрести навыки решения задач в программных пакетах, выполняющих численные расчеты по гидродинамике, теплофизике и прочности.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП

2.1. Дисциплина «Компьютерная гидродинамика, теплофизика и прочность» относится к *части, формируемой участниками образовательных отношений*, и изучается в течение 8 семестра.

2.2. Для изучения данной учебной дисциплины (модуля) необходимы следующие знания, умения, навыки, формируемые предшествующими учебными дисциплинами (модулями):

- высшая математика (аналитическая геометрия, дифференциальное исчисление, интегральное исчисление);
- теоретическая физика;
- информатика.

Знания: основные методы, применяемые при численном решении физических задач.

Умения: применять знания при решении конкретных исследовательских задач.

Навыки: владеть методами численного решения основных задач механики, термодинамики и статистической физики, электродинамики, оптики, квантовой физики.

2.3. Последующие учебные дисциплины (модули) и (или) практики, для которых необходимы знания, умения, навыки, формируемые данной учебной дисциплиной (модулем): теоретическая механика, механика сплошных сред, электродинамика, квантовая теория, физика конденсированного состояния, термодинамика.

3. ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

Процесс освоения дисциплины (модуля) направлен на формирование элементов следующей(их) компетенции(ий) в соответствии с ФГОС ВО и ОПОП ВО по данному направлению подготовки / специальности:

в) *профессиональной(ых) (ПК)*. ПК - 4. Готовность к составлению отчета по выполненному заданию и научных публикаций, к участию во внедрении результатов исследований и разработок.

Таблица 1 - Декомпозиция результатов обучения

Код компетенции	Планируемые результаты освоения дисциплины		
	Знать (1)	Уметь (2)	Владеть (3)
ПК - 4. Готовность к составлению отчета по выполненному заданию и научных публикаций, к участию во внедрении результатов исследований и разработок.	ПК-4.1 знать основные требования, предъявляемые к оформлению и содержанию отчетов об исследовательской работе, правила оформления математических формул, таблиц и т.п.	ПК-4.2 уметь представлять результаты исследовательской работы с использованием электронных средств презентации	ПК-4.3 владеть методами исполнения схем, графиков, чертежей, диаграмм, номограмм и других профессионально значимых изображений

4. Структура и содержание дисциплины

Объём дисциплины (модуля) составляет 5 зачётных единиц, в том числе 66 часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (из них 22 часа – лекции, 44 часа – практические, семинарские занятия), и 114 часов – на самостоятельную работу обучающихся.

Таблица 2. Структура и содержание дисциплины (модуля)

№ п/п	Наименование радела (темы)	Семестр	Контактная работа (в часах)			Самостоят. работа		Форма текущего контроля успеваемости, форма промежуточной аттестации [по семестрам]
			Л	ПЗ	ЛР	КР	СР	
1	Раздел 1. Введение. Сеточные генераторы.	8	7	14			50	П.Р. 1, П.Р. 2
2	Раздел 2. Решение задач гидродинамики в пакетах конечно-элементного анализа.	8	7	14			50	П.Р. 3, П.Р. 4
3	Раздел 3. Решение задач теплофизики в пакетах конечно-	8	8	16			14	П.Р. 5

	элементного анализа.							
ИТОГО		22	44			114	ЭКЗАМЕН	

Таблица 3 - Матрица соотнесения тем/разделов учебной дисциплины/модуля и формируемых в них компетенций

Темы, разделы дисциплины	Кол-во часов	Компетенции	
		ПК4	общее количество компетенций
Раздел 1. Введение. Сеточные генераторы.	<i>71</i>	+	<i>1</i>
Раздел 2. Решение задач гидродинамики в пакетах конечно-элементного анализа.	<i>71</i>	+	<i>1</i>
Раздел 3. Решение задач теплофизики в пакетах конечно-элементного анализа.	<i>38</i>	+	<i>1</i>
Итого	<i>180</i>		<i>1</i>

Краткое содержание разделов дисциплины

Раздел 1. Введение. Сеточные генераторы. Предмет математического моделирования в физике. Виды математических моделей. Дифференциальные модели. Стохастические и детерминистические модели. Методы оптимизации. Фундаментальные экспериментально-статистические модели и методы. Математическое моделирование в физике.

Раздел 2. Решение задач гидродинамики в пакетах конечно-элементного анализа. Модели турбулентности. Численный эксперимент в задачах механики. Численный эксперимент в задачах термодинамики. Численный эксперимент в задачах электродинамики. Численный эксперимент в задачах оптики. Численный эксперимент в задачах квантовой и статистической физики.

Раздел 3. Решение задач теплофизики в пакетах конечно-элементного анализа. Использование программных пакетов для решения физических задач. Моделирование физических опытов. Физические эксперименты на компьютере.

5. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРЕПОДАВАНИЮ И ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

5.1. Указания для преподавателей по организации и проведению учебных занятий по дисциплине (модулю). Текущий контроль предусматривает: учет активности студентов в ходе проведения практических занятий, итоговый контроль проводится в форме устного экзамена по темам дисциплины. Итоговая оценка формируется как взвешенная сумма оценки, накопленной в течение курса.

5.2. Указания для обучающихся по освоению дисциплины

Приступая к изучению дисциплины, студенту необходимо внимательно ознакомиться с тематическим планом занятий, списком рекомендованной литературы. Следует уяснить последовательность выполнения индивидуальных учебных заданий. Самостоятельная работа студента предполагает работу с научной и учебной литературой. Уровень и глубина усвоения дисциплины зависят от активной и систематической работы, изучения рекомендованной литературы, выполнения лабораторных работ.

Таблица 4 - Содержание самостоятельной работы обучающихся

Номер радела (темы)	Темы/вопросы, выносимые на самостоятельное изучение	Кол-во часов	Формы работы
1	Раздел 1. Введение. Сеточные генераторы.	50	работа с научной и учебной литературой, подготовка к практическим работам, экзамену
2	Раздел 2. Решение задач гидродинамики в пакетах конечно-элементного анализа.	50	работа с научной и учебной литературой, подготовка к практическим работам, экзамену
3	Раздел 3. Решение задач теплофизики в пакетах конечно-элементного анализа.	14	работа с научной и учебной литературой, подготовка к практическим работам, экзамену

5.3. Виды и формы письменных работ, предусмотренных при освоении дисциплины (модуля), выполняемые обучающимися самостоятельно

Не предусмотрены.

6. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Возможно применение электронного обучения и дистанционных образовательных технологий. В соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки реализация компетентностного подхода предусматривает широкое использование в учебном процессе активных и интерактивных форм проведения занятий в сочетании с внеаудиторной работой с целью формирования и развития требуемых компетенций обучающихся.

6.1. Образовательные технологии

Учебные занятия по дисциплине могут проводиться с применением информационно-телекоммуникационных сетей при опосредованном (на расстоянии) интерактивном взаимодействии обучающихся и преподавателя в режимах on-line или off-line в формах: видеолекций, лекций-презентаций, видеоконференции, собеседования в режиме чат, форума, выполнения лабораторных работ.

Таблица 5 - Образовательные технологии, используемые при реализации учебных занятий

Раздел, тема дисциплины (модуля)	Форма учебного занятия		
	Лекция	Практическое занятие, семинар	Лабораторная работа
Раздел 1. Введение. Сеточные генераторы.	<i>Обзорная лекция</i>	<i>выполнение практических работ</i>	<i>не предусмотрено</i>
Раздел 2. Решение задач гидродинамики в пакетах конечно-элементного анализа.	<i>Лекция-диалог</i>	<i>выполнение практических работ</i>	<i>не предусмотрено</i>
Раздел 3. Решение задач теплофизики в пакетах конечно-элементного анализа.	<i>Обзорная лекция</i>	<i>выполнение практических работ</i>	<i>не предусмотрено</i>

6.2. Информационные технологии

Информационные технологии, используемые при реализации различных видов учебной и внеучебной работы:

- использование возможностей Интернета в учебном процессе: рассылка заданий, предоставление выполненных работ, ответы на вопросы, ознакомление учащихся с оценками и т.д.;
- использование электронных учебников и различных сайтов как источников информации;
- использование электронной почты преподавателя;
- использование средств представления учебной информации: электронных учебных пособий и практикумов, применение новых технологий для проведения очных лекций и семинаров с использованием презентаций и т.д.;
- использование интегрированных образовательных сред, где главной составляющей являются не только применяемые технологии, но и содержательная часть, т.е. информационные ресурсы;
- использование виртуальной обучающей среды (или системы управления обучением LMS Moodle) или иных информационных систем, сервисов и мессенджеров.

6.3. Программное обеспечение, современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы

6.3.1. Программное обеспечение

Наименование программного обеспечения	Назначение
Adobe Reader	Программа для просмотра электронных документов
MathCad 14	Система компьютерной алгебры из класса систем автоматизированного проектирования, ориентированная на подготовку интерактивных документов с вычислениями и визуальным сопровождением
Moodle	Образовательный портал ФГБОУ ВО «АГУ»
Microsoft Office 2013, Microsoft Office Project 2013, Microsoft Office Visio 2013	Пакет офисных программ
7-zip	Архиватор
Microsoft Windows 7 Professional	Операционная система
Kaspersky Endpoint Security	Средство антивирусной защиты
Paint .NET	Растровый графический редактор
VLC Player	Медиапроигрыватель
WinDjView	Программа для просмотра файлов в формате DJV и DjVu
Платформа дистанционного обучения LMS Moodle	Виртуальная обучающая среда

6.3.2. Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы

1. Электронный каталог Научной библиотеки АГУ на базе MARKSQL НПО «Информ-систем».

<https://library.asu.edu.ru>

2. Универсальная справочно-информационная полнотекстовая база данных периодических изданий ООО «ИБИС». <http://dlib.eastview.com>. Имя пользователя: AstrGU. Пароль: AstrGU

3. Электронные версии периодических изданий, размещённые на сайте информационных ресурсов. www.polpred.com.

4. Электронный каталог «Научные журналы АГУ» <https://journal.asu.edu.ru/>.

5. Корпоративный проект Ассоциации региональных библиотечных консорциумов (АРБИКОН) «Межрегиональная аналитическая роспись статей» (МАРС) – сводная база данных, содержащая полную аналитическую роспись 1800 названий журналов по разным отраслям знаний. Участники проекта предоставляют друг другу электронные копии отсканированных статей из книг, сборников, журналов, содержащихся в фондах их библиотек. [Сводный каталог периодики библиотек России \(arbicon.ru\)](http://arbicon.ru).

6. Справочная правовая система КонсультантПлюс. Содержится огромный массив справочной правовой информации, российское и региональное законодательство, судебную практику, финансовые и кадровые консультации, консультации для бюджетных организаций, комментарии законодательства, формы документов, проекты нормативных правовых актов, международные правовые акты, правовые акты, технические нормы и правила. <http://www.consultant.ru>.

7. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

7.1. Паспорт фонда оценочных средств

При проведении текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю) «Компьютер практикум по ФКСВ» проверяется сформированность у обучающихся компетенций, указанных в разделе 3 настоящей программы. Этапность формирования данных компетенций в процессе освоения образовательной программы определяется последовательным освоением дисциплин (модулей) и прохождением практик, а в процессе освоения дисциплины (модуля) – последовательным достижением результатов освоения содержательно связанных между собой разделов, тем.

Таблица 5.

Соответствие изучаемых разделов, результатов обучения и оценочных средств

№ п/п	Контролируемые разделы дисциплины (модуля)	Код контролируемой компетенции (компетенций)	Наименование оценочного средства
1	Раздел 1. Введение. Сеточные генераторы.	ПК 4	П.Р. 1, П.Р. 2
2	Раздел 2. Решение задач гидродинамики в пакетах конечно-элементного анализа.	ПК 4	П.Р. 3, П.Р. 4,
3	Раздел 3. Решение задач теплофизики в пакетах конечно-элементного анализа.	ПК 4	П.Р. 5

7.2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций, описание шкал оценивания

Таблица 7 – Показатели оценивания результатов обучения в виде знаний

Шкала оценивания	Критерии оценивания
5 «отлично»	-дается комплексная оценка предложенной ситуации; -демонстрируются глубокие знания теоретического материала и умение их применять; - последовательное, правильное выполнение всех заданий; -умение обоснованно излагать свои мысли, делать необходимые выводы.

4 «хорошо»	-дается комплексная оценка предложенной ситуации; -демонстрируются глубокие знания теоретического материала и умение их применять; - последовательное, правильное выполнение всех заданий; -возможны единичные ошибки, исправляемые самим студентом после замечания преподавателя; -умение обоснованно излагать свои мысли, делать необходимые выводы.
3 «удовлетворительно»	-затруднения с комплексной оценкой предложенной ситуации; -неполное теоретическое обоснование, требующее наводящих вопросов преподавателя; -выполнение заданий при подсказке преподавателя; - затруднения в формулировке выводов.
2 «неудовлетворительно»	- неправильная оценка предложенной ситуации; -отсутствие теоретического обоснования выполнения заданий.

Таблица 8 – Показатели оценивания результатов обучения в виде умений и владений

Шкала оценивания	Критерии оценивания
5 «отлично»	-дается комплексная оценка предложенной ситуации; -демонстрируются глубокие знания теоретического материала и умение их применять; - последовательное, правильное выполнение всех заданий; -умение обоснованно излагать свои мысли, делать необходимые выводы.
4 «хорошо»	-дается комплексная оценка предложенной ситуации; -демонстрируются глубокие знания теоретического материала и умение их применять; - последовательное, правильное выполнение всех заданий; -возможны единичные ошибки, исправляемые самим студентом после замечания преподавателя; -умение обоснованно излагать свои мысли, делать необходимые выводы.
3 «удовлетворительно»	-затруднения с комплексной оценкой предложенной ситуации; -неполное теоретическое обоснование, требующее наводящих вопросов преподавателя; -выполнение заданий при подсказке преподавателя; - затруднения в формулировке выводов.
2 «неудовлетворительно»	- неправильная оценка предложенной ситуации; -отсутствие теоретического обоснования выполнения заданий.

7.3. Контрольные задания и иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения по дисциплине (модулю)

Перечень практических работ

Тема: «Введение. Сеточные генераторы.»

Практическая работа №1

Исследование решений уравнения гиперболического типа

Одним из методов решения дифференциальных уравнений в частных производных является **метод сеток**. Идея метода заключается в следующем. Для простоты, ограничимся случаем только функции двух переменных, и будем полагать, что решение уравнения

ищется на квадратной области единичного размера. Разобьем область сеткой. Шаг сетки по оси x и по оси y , вообще говоря, может быть разный. По определению частная производная равна

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x)}{\Delta x} \approx \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x)}{\Delta x}$$

Если рассматривать функцию только в узлах сетки, то частную производную можно записать в форме

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h},$$

где узел (i, j) соответствует точке (x, y) . Полученное выражение называется **правой конечной разностью**. Название связано с тем, что для вычисления производной в точке используются значения функции в этой точке и точке, лежащей правее. Очевидно, что сходное выражение можно было бы получить, используя точку, лежащую слева.

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \approx \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h}$$

Такое выражение называется **левой конечной разностью**. Можно получить центральную конечную разность, найдя среднее этих выражений.

Теперь получим выражения для вторых производных.

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

В данном случае для нахождения производной мы использовали симметричные точки. Однако, очевидно, можно было бы использовать точки с несимметричным расположением.

В качестве примера рассмотрим решение волнового уравнения (уравнения гиперболического типа).

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

Уравнение будем решать методом сеток. Запишем уравнение в конечных разностях

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} = \frac{1}{v^2} \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\tau^2}$$

Полученное уравнение позволяет выразить значение функции u в момент времени $j+1$ через значения функции в предыдущие моменты времени.

$$u_{i,j+1} = v^2 \left(\frac{\tau}{h} \right)^2 (u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) + 2u_{i,j} - u_{i,j-1}$$

Такая разностная схема называется **явной**, так как искомая величина получается в явном виде. Она устойчива, если $\tau \leq h/v$.

Пример 1.1. Зададим начальные условия: смещение струны U в начальный и последующий моменты времени описывается синусоидальной функцией.

$$n := 20 \quad j := 0..n \quad i := 0..100$$

$$U_{i,0} := \sin\left(\pi \cdot \frac{i}{50}\right) \quad U_{i,1} := U_{i,0}$$

(Совпадение смещений при $j=0$ и $j=1$ соответствует нулевой начальной скорости.)

Зададим граничные условия: на концах струны смещение равно 0 в любой момент времени

$$U_{0,j} := 0 \quad U_{100,j} := 0$$

Будем полагать коэффициент $a := 1 \quad k := 0.02$

$$i := 1..99 \quad j := 1..n-1 \quad i := 0..100$$

Записываем уравнение в конечных разностях, разрешенное относительно $U_{i,j+1}$

$$U_{i,j+1} := a^2 \cdot k \cdot (U_{i+1,j} - 2 \cdot U_{i,j} + U_{i-1,j}) + 2 \cdot U_{i,j} - U_{i,j-1}$$

Представляем результат на графике

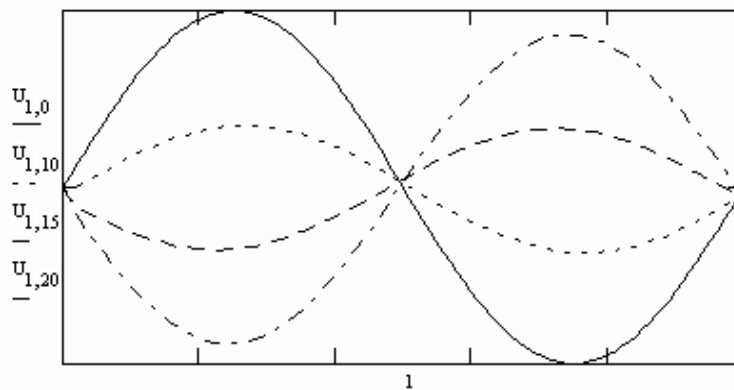


Рис. 1.1.

В случае, если имеется аналитическое решение гиперболического уравнения с заданными начальными и граничными условиями, то представить графически поведение функции $U = U(x, T)$ в любой момент времени T можно с помощью элемента управления *Slider* (ползунковый регулятор). Данный элемент устанавливает шаблон, позволяющий изменять значения указанной переменной от $T=0$ до $T = T_{\max}$ с шагом 1. Величина $T_{\max}$ должна являться целым числом.

Пример 1.2.

Вставим элемент *Slider* в рабочее поле (рис 1.2).



Рис. 1.2.

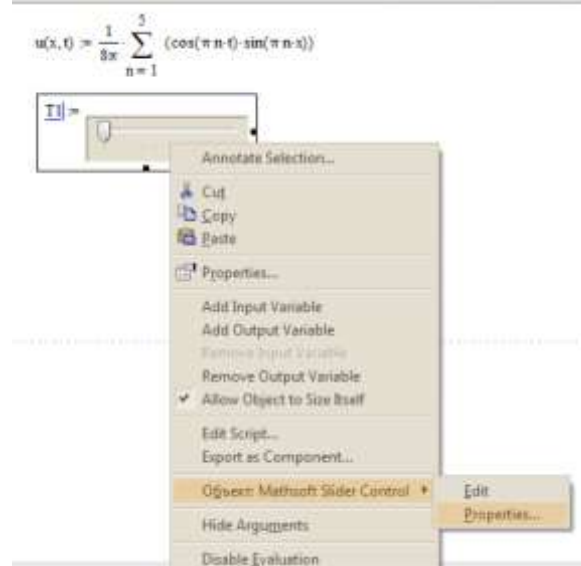


Рис. 1.3.

Вставим имя переменной и вызовем свойства объекта (рис. 1.3).

Зададим начальное $T=0$ и конечное $T = T_{\max}$ значения времени и построим график $u(x, T)$ зависимости для заданного положением регулятора времени T_1 .

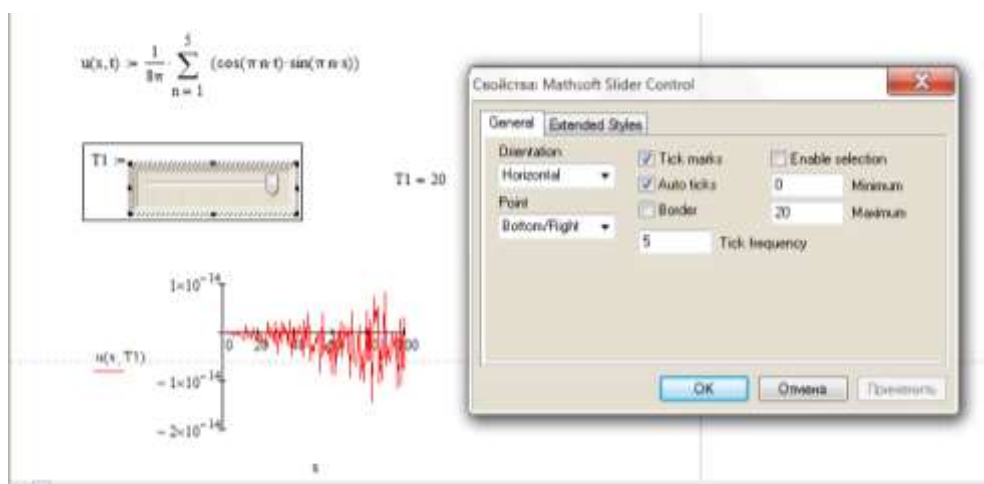


Рис. 1.4.

Задания:

- Для заданного аналитического решения уравнения гиперболического типа
 - построить график зависимости $U = U(x, t_1)$ в моменты времени $t_1 = 0, 10, 20$ секунд;
 - построить (если это возможно) с использованием объекта *slider* графики зависимости $U = U(x, T)$, $T := \text{slider}$ и $U = U(x, 0)$, $n := \text{slider}$.
- Решить уравнение гиперболического типа методом конечных разностей при следующих начальных и граничных условиях.

№	Задание 1 $U = U(x, t)$	Задание 2	
		Гранич. Усл.	Начальные условия
1.	$\frac{16}{\pi^3} \sum_{k=0}^{100} \frac{\cos((2k+1)\pi t) \sin((2k+1)\pi x)}{(2k+1)^3}$	$U(0, t) = 0,$ $U(l, t) = 0$	$U(x, 0) = -2x^2 + 2x, \frac{\partial U(x, 0)}{\partial t} = 0$
2.	$\frac{1}{30} (\cos(7\pi/2) \sin(7\pi x/2) + \cos(15\pi/2) \sin(15\pi x/2))$	$U(0, t) = 0,$ $U(l, t) = 0$	$U(x, 0) = (1/15) \sin(11\pi x/2) \cdot \cos(4\pi x/2),$ $\frac{\partial U(x, 0)}{\partial t} = 0$
3.	$\frac{1}{8} \cos(3\pi t) \sin(3\pi x)$	$U(0, t) = 0,$ $U(l, t) = 0$	$U(x, 0) = (1/8) \sin(3\pi x), \frac{\partial U(x, 0)}{\partial t} = 0$
4.	$\frac{32}{\pi^3} \sum_{k=1}^{10} \frac{\cos((2k+1)\pi t) \sin((2k+1)\pi x)}{(2k+1)^3}$	$U(0, t) = 0,$ $U(l, t) = 0$	$U(x, 0) = (1/4) \sin^3 x, \frac{\partial U(x, 0)}{\partial t} = 0$
5.	$\frac{20}{\pi^2} \sum_{k=0}^{100} \frac{\sin((2k+1)\pi t) \sin((2k+1)\pi x)}{(2k+1)^2}$	$U(0, t) = 0,$ $U(l, t) = 0$	$U(x, 0) = 0, \frac{\partial U(x, 0)}{\partial t} = 5$
6.	$\frac{12}{\pi^2} \sum_{k=0}^{20} \frac{\cos((2k+1)3\pi t) \sin((2k+1)\pi x)}{(2k+1)^2}$	$U(0, t) = 0,$ $U(l, t) = 0$	$U(x, 0) = (1/12) \sin(3\pi x), \frac{\partial U(x, 0)}{\partial t} = 0$

7.	$\frac{2l^2}{\pi^2 3(l-3)} \sum_{k=0}^{15} \frac{\sin(3k\pi) \sin(k\pi t) \sin(k\pi x)}{k^2}$	$U(0,t) = 0,$ $U(l,t) = 0$	$U(x,0) = 0, \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = 3x(l-x)$
8.	$\frac{1}{16} \sum_{n=1}^9 \cos(\pi n t) \sin(\pi n x)$	$U(0,t) = 0,$ $U(l,t) = 0$	$U(x,0) = (1/4)x(l-x), \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = 0$
9.	$\frac{1}{5} \sum_{n=1}^{15} \cos(\pi n t / 3) \sin(\pi n x / 5)$	$U(0,t) = 0,$ $U(l,t) = 0$	$U(x,0) = 0, \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = 3lx - 3x^2$
10.	$\frac{1}{4\pi^2} \sum_{n=1}^{15} \frac{\cos(\pi n t / 3) \sin(\pi n x / 5)}{(2n+1)^2}$	$U(0,t) = 0,$ $U(l,t) = 0$	$U(x,0) = 10 \sin(\pi x / l), \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = 0$
11.	$\frac{1}{12} \sum_{n=1}^{10} \frac{\cos(3\pi n t) \sin(4\pi n x)}{(2n+1)^2}$	$U(0,t) = 0,$ $U(l,t) = 0$	$U(x,0) = 2(x - x^3), \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = 0$
12.	$\frac{2l^2}{3\pi^2} \sum_{k=0}^{20} \frac{\sin(k\pi) \sin(k\pi t / 3) \sin(k\pi x)}{(2k+1)^2}$	$U(0,t) = 0,$ $U(l,t) = 0$	$U(x,0) = 4(x^2 - x^3), \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = 0$
13.	$\frac{200}{3\pi^2} \sum_{k=0}^{10} \frac{\sin(3k\pi) \sin(k\pi t / 3) \sin(k\pi x)}{k^2}$	$U(0,t) = 0,$ $U(l,t) = 0$	$U(x,0) = 0, \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = 3(x - x^3)$

Практическая работа №2

Исследование решений уравнения параболического типа

Еще один пример использования конечных разностей – уравнение теплопроводности (диффузии).

$$S = \begin{bmatrix} -0.8002 \\ 0.1766 \end{bmatrix}$$

Это уравнение параболического типа. Явная разностная схема для этого уравнения имеет вид

$$u_{i,j+1} = D \frac{\tau}{h^2} (u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) + u_{i,j} \quad (2.1)$$

Эта разностная схема устойчива, если $\tau \leq \frac{h^2}{2D}$. Для краткости в дальнейшем мы будем обозначать весь множитель, стоящий перед скобкой, как k .

Задаем коэффициент $\kappa := .15$ и диапазон изменения пространственной и временной координат:

$$t := 0..29 \quad x := 1..49$$

Задаем начальные и граничные условия

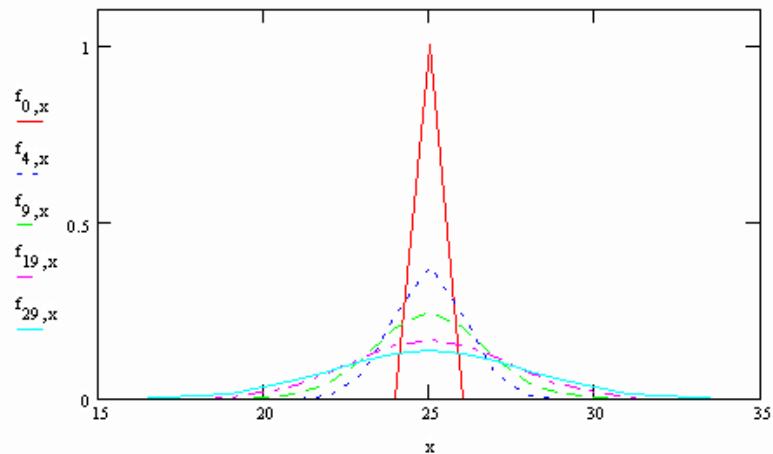
$$f_{0,x} := 0 \quad f_{0,0} := 0 \quad f_{0,50} := 0 \quad f_{0,25} := 1$$

Уравнение в конечных разностях имеет вид

$$f_{t+1,x} := f_{t,x} + \kappa (f_{t,x-1} - 2 \cdot f_{t,x} + f_{t,x+1})$$

Представляем результаты на графике. (Для большей наглядности изображена только центральная часть)

$x := 15..35$



Основное достоинство явных методов – их простота – зачастую сводится на нет достаточно жесткими ограничениями на величину шага. Явные схемы обычно устойчивы при столь малых шагах по времени, что они становятся непригодными для практических расчетов. Этому существенного недостатка позволяют избежать неявные схемы. Свое название они получили потому, что значения искомой функции на очередном временном шаге не могут быть явно выражены через значения функции на предыдущем шаге.

Рассмотрим применение неявной схемы на примере уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.2)$$

Запишем неявную разностную схему для этого уравнения

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\tau} = \frac{c}{h^2} (u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}) \quad (2.3)$$

Здесь первый индекс соответствует пространственной, а второй – временной координате. В отличие от явной схемы, для вычисления в правой части уравнения используются значения функции на том же самом временном шаге. Вводя

обозначение $\mu = \frac{c\tau}{h^2}$, уравнение (2.3) можно переписать в виде

$$(1 + 2\mu)u_{i,j+1} - \mu(u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1}) = u_{i,j} \quad (2.4)$$

или в матричной форме

$$\begin{pmatrix} 1+2\mu & -\mu & & \\ -\mu & 1+2\mu & -\mu & \\ & & \dots & \\ & & & 1+2\mu & -\mu \\ & & & -\mu & 1+2\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,j+1} \\ u_{2,j+1} \\ \vdots \\ u_{n-1,j+1} \\ u_{n,j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{1,j} + \mu u_{1,j}^2 \\ u_{2,j} \\ \vdots \\ u_{n-1,j} \\ u_{n,j} + \mu u_{n,j}^2 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

где $u(0,t) = \alpha$ и $u(t,1) = \beta$.

Задаем количество узлов сетки (в данном случае оно одинаково для обеих переменных) $n := 30$

$i := 0..n$ $j := 0..n$ $k := 0..n-1$ $m := 1..n-1$

Задаем значения параметров $\alpha := 0$ $\beta := 1$ $\mu := 5$

и начальное распределение температуры в области

$$u_{i,0} := \sin\left(\pi \cdot \frac{i}{n}\right) + \frac{i}{n}$$

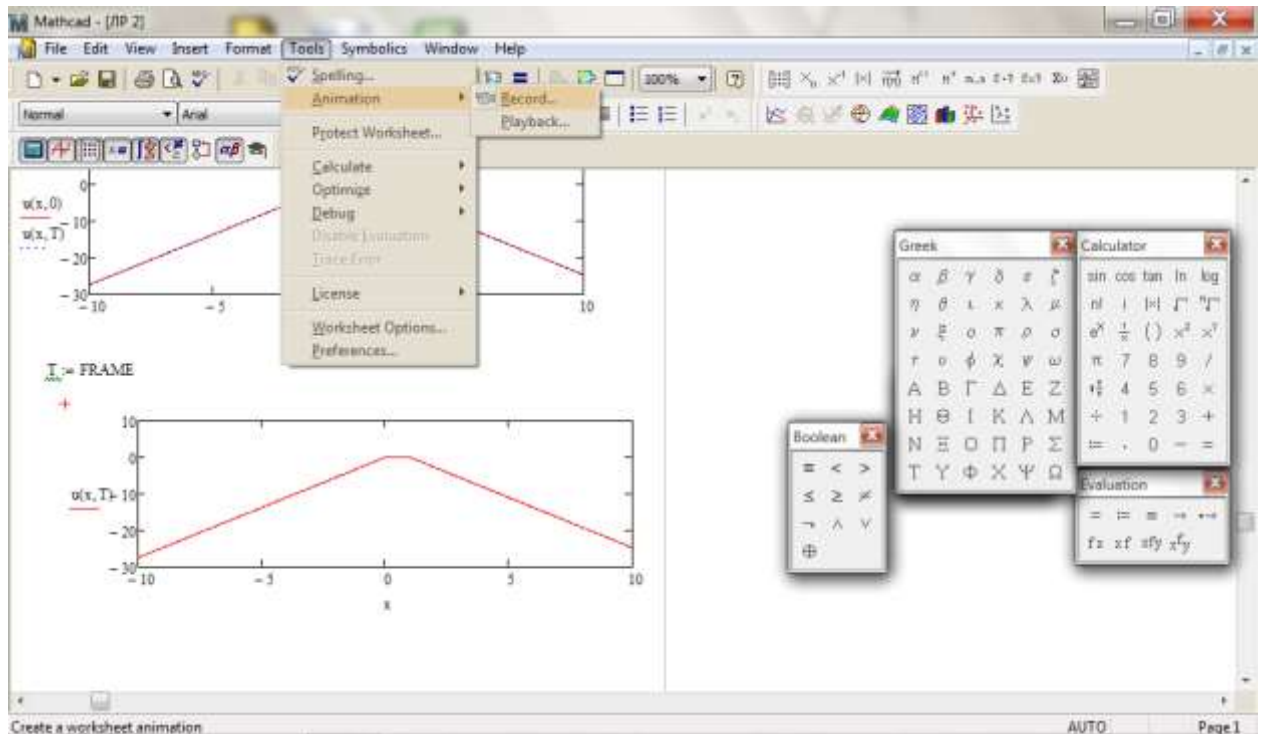
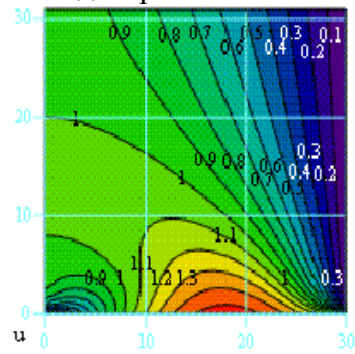
Формируем матрицы уравнения (2.5)

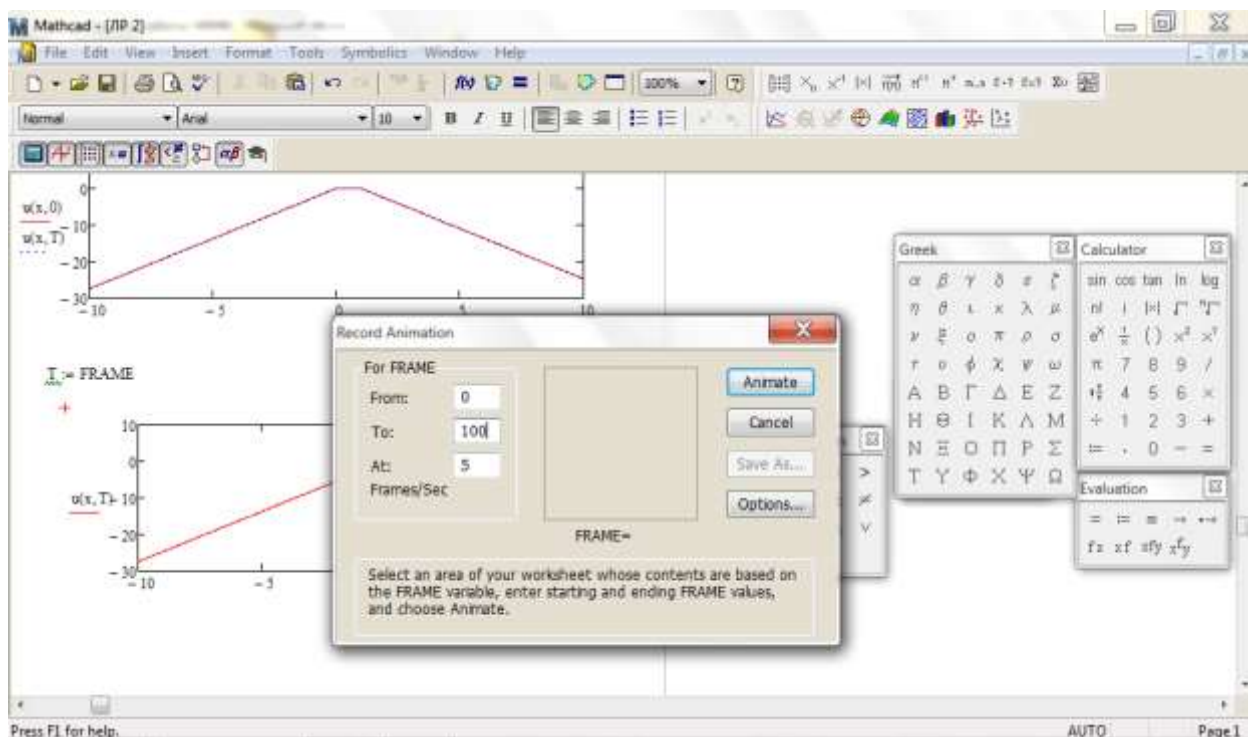
$$u_{0,j} := \alpha \quad u_{n,j} := \beta$$

$$A_{i,i} := 1 + 2 \cdot \mu \quad A_{m,m-1} := -\mu \quad A_{m-1,m} := -\mu$$

$$\mu \alpha_i := 0 \quad \mu \alpha_0 := \mu \cdot \alpha \quad \mu \beta_i := 0 \quad \mu \beta_0 := \mu \cdot \beta$$

Находим решение системы $u^{(j+1)} := A^{-1} \cdot (u^{(j)} + \mu \alpha + \mu \beta)$





Задания:

1. Решить уравнение параболического типа (теплопроводности, диффузии) с помощью встроенной Mathcad-функции *pdsolve* при заданных начальных и граничных условиях. Построить график зависимости $U = U(x, t_1)$ в моменты времени $t_1 = 0, 10, 20$ секунд.

2. Сделать запись анимированного клипа, показывающего изменение функции $U = U(x, T)$, полученной в Зад. 1, со временем при $T := FRAME$.

Начальные и граничные условия:

№	Задание 1	
	Гранич. усл	Нач. усл.
14.	$U(0,t) = 0, U(\pi,t) = 0$	$U(x,0) = (1/8)\sin(3\pi x)$
15.	$U(0,t) = 0, U(\pi,t) = 0$	$U(x,0) = 4\sin(x)$
16.	$U(0,t) = 0, U(\pi,t) = 0$	$U(x,0) = \sin(3x)$
17.	$U(0,t) = 0, U(\pi,t) = 0$	$U(x,0) = (1/16)\sin^3 x$
18.	$U_x(0,t) = 0, U_x(1,t) = 0$	$U(x,0) = \cos(\pi x)$
19.	$U_x(0,t) = 0, U_x(1,t) = 0$	$U(x,0) = (1/5)\cos(3\pi x)$
20.	$U_x(0,t) = 0, U_x(1,t) = 0$	$U(x,0) = 3\cos(3\pi x)$
21.	$U_x(0,t) = 0, U_x(1,t) = 0$	$U(x,0) = (1/8)\cos(\pi x/6)$
22.	$U(0,t) = 0, U_x(1,t) = 0$	$U(x,0) = \sin(\pi x/2)$
23.	$U_x(0,t) = 0, U(1,t) = 0$	$U(x,0) = \cos(\pi x/2)$
24.	$U(0,t) = 0, U_x(1,t) = 0$	$U(x,0) = 2\sin(\pi x/6)$
25.	$U_x(0,t) = 0, U(1,t) = 0$	$U(x,0) = 2\cos(\pi x/6)$
26.	$U(0,t) = 0, U_x(1,t) = 0$	$U(x,0) = \sin^3(\pi x)$

Тема: «Решение задач гидродинамики в пакетах конечно-элементного анализа»

Практическая работа №3

Фурье анализ сигнала. Сложение колебаний и волн.

Рассмотрим сигнал, изменяющийся во времени по произвольному закону (рис.3.1). Если мгновенные значения сигнала повторяются через равные промежутки времени, сигнал называется периодическим.

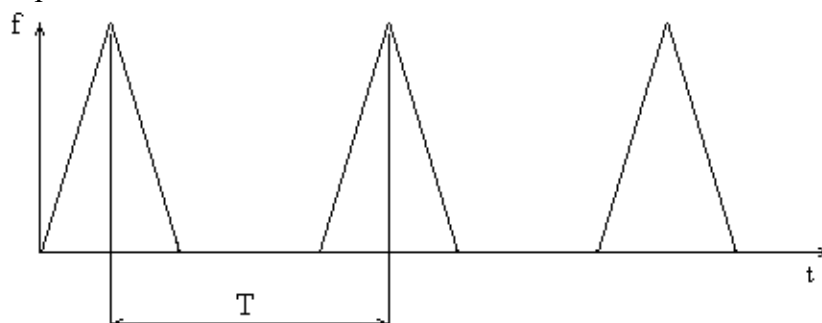


Рисунок 3.1 Пилообразный сигнал

Любую периодическую функцию $f(t)$, удовлетворяющую условиям Дирихле, можно разложить в бесконечный гармонический ряд – ряд Фурье:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos n\omega_1 t + b_n \cdot \sin n\omega_1 t), \quad (3.1)$$

где $\omega_1 = 2\pi/T$ - частота основной (первой) гармоники сигнала,

$n \cdot \omega_1$ - частоты второй, третьей и гармоник более высокого порядка ($n = 2, 3, 4 \dots$),

$\frac{a_0}{2}$ - постоянная составляющая сигнала,

a_n, b_n - амплитуды косинусоидальной и синусоидальной составляющих сигнала.

Коэффициенты разложения определяются соотношениями:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos n\omega_1 t dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \sin n\omega_1 t dt$$

Выражение (3.1) можно записать в виде:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cdot \sin(n\omega_1 t + \psi_n)) \quad (3.2)$$

где $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $\psi_n = \arctg \frac{a_n}{b_n}$

Правую часть (3.2) на оси частот можно показать в виде линий амплитудного спектра $f(t)$ и фазового спектра $f(t)$ (рис. 3.2)

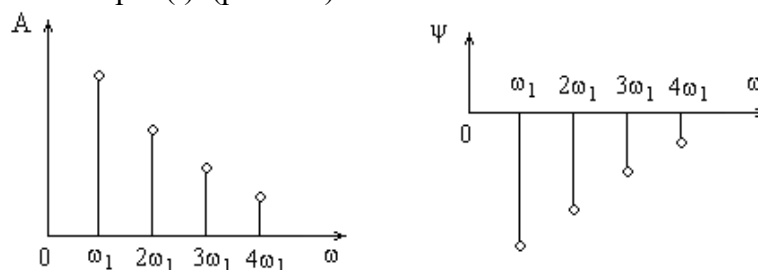
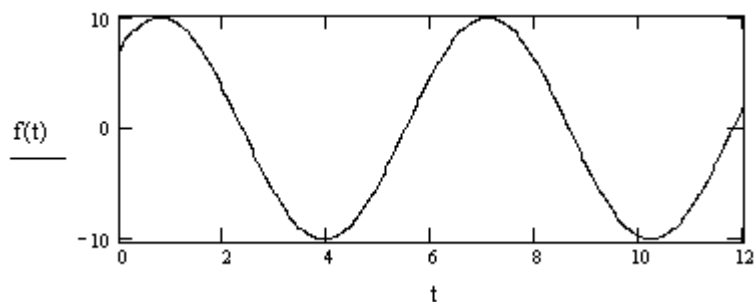


Рисунок 3.2 Амплитудный и фазовый спектр $f(t)$

Пример 3.1. Определим амплитудный спектр косинусоидального сигнала с помощью пакета MathCAD

$$f(t) := 10 \cdot \sin\left(1 \cdot t + \frac{\pi}{4}\right)$$



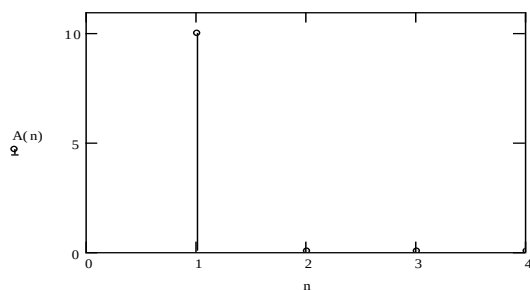
$$T := 2 \cdot \pi \cdot \omega_1 := \frac{2 \cdot \pi}{T}$$

$$a_0 := \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t) dt \quad a(n) := \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot \cos(n \cdot \omega_1 \cdot t) dt \quad b(n) := \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot \sin(n \cdot \omega_1 \cdot t) dt$$

$$p(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^3 (a(n) \cdot \cos(n \cdot \omega_1 \cdot t) + b(n) \cdot \sin(n \cdot \omega_1 \cdot t))$$

$$A(n) := \sqrt{a(n)^2 + b(n)^2}$$

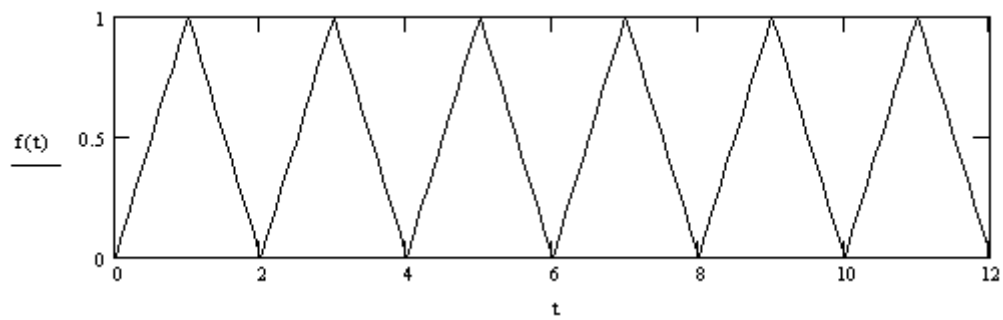
$$n := 1, 2 \dots 10$$



Пример 3.2. Разложим в ряд Фурье пилообразный сигнал и определим его амплитудный спектр:

$$T := 2 \cdot \omega_1 := \frac{2 \cdot \pi}{T} \quad \tau_f := \frac{T}{4} \quad \tau := \frac{T}{2}$$

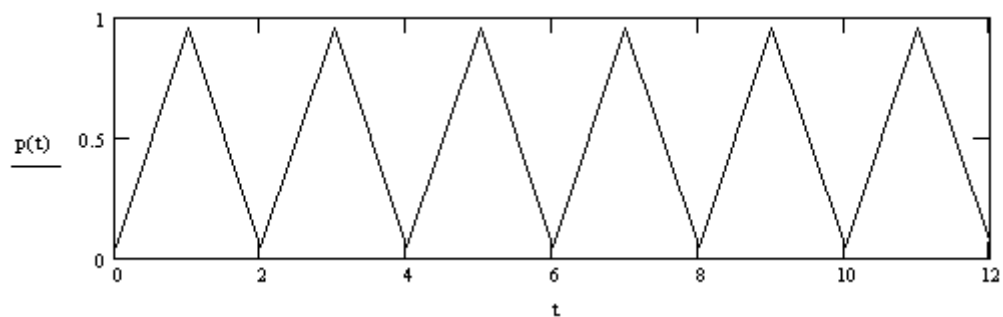
$$\underset{\text{f}}{f}(t) := \begin{cases} i \leftarrow 0 \\ \text{while } \tau \cdot i \leq 3 \cdot T \\ \quad \left| \begin{array}{l} F \leftarrow \begin{cases} \frac{fm}{\tau f} \cdot (t - \tau \cdot i) & \text{if } \tau \cdot i \leq t < \tau \cdot i + \tau f \\ \left[fm - \frac{fm}{\tau f} \cdot [t - (\tau \cdot i + \tau f)] \right] & \text{if } \tau \cdot i + \tau f \leq t < \tau \cdot i + 2 \cdot \tau f \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\ f1 \leftarrow f1 + F \\ i \leftarrow i + 1 \end{array} \right. \\ f1 \end{cases}$$



$$a_0 := \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t) dt \quad a(n) := \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot \cos(n \cdot \omega_1 \cdot t) dt \quad b(n) := \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot \sin(n \cdot \omega_1 \cdot t) dt$$

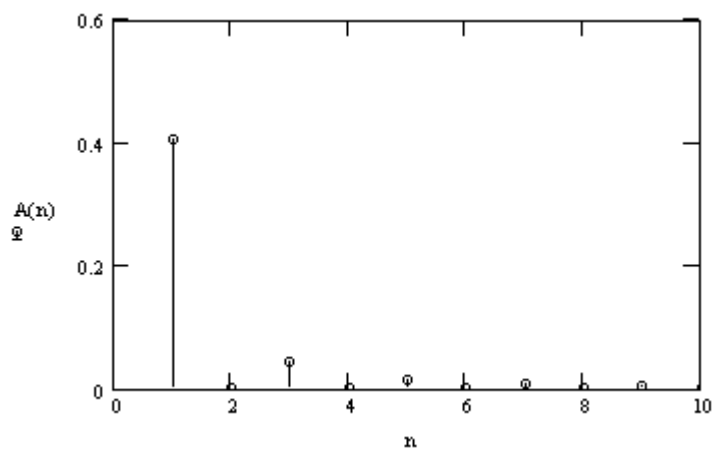
$$p(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^3 (a(n) \cdot \cos(n \cdot \omega_1 \cdot t) + b(n) \cdot \sin(n \cdot \omega_1 \cdot t))$$

t := 0, 1 .. 12



n := 1, 2 .. 10

$$A(n) := \sqrt{a(n)^2 + b(n)^2}$$



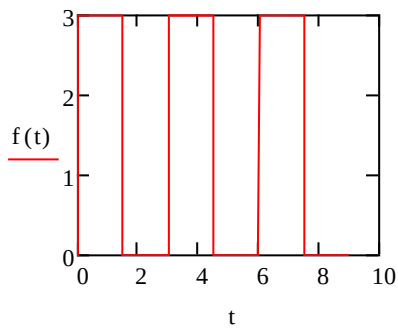
Пример 3.3. Разложим в ряд Фурье и определим амплитудный спектр сигнала последовательности прямоугольных импульсов:

$$T := 2 \quad \omega_1 := \frac{2 \cdot \pi}{T} \quad \tau := \frac{T}{2}$$

```

f(t) :=
  i ← 0
  while τ · i ≤ tm
    F ←
      fm if τ · i < t < τ · i + τ
      0 otherwise
    f1 ← f1 + F
    i ← i + 2
  f1

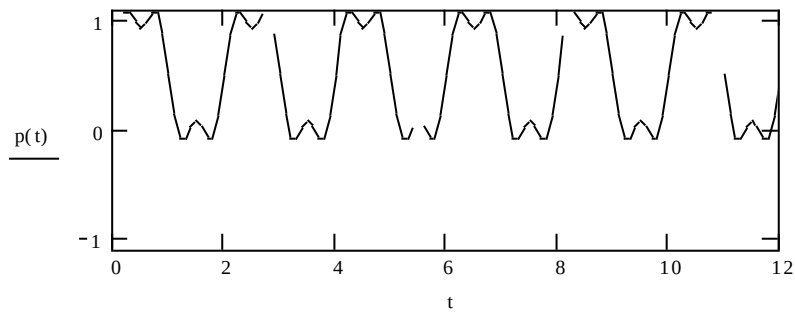
```



$$a_0 := \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t) dt \quad a(n) := \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot \cos(n \cdot \omega_1 \cdot t) dt \quad b(n) := \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot \sin(n \cdot \omega_1 \cdot t) dt$$

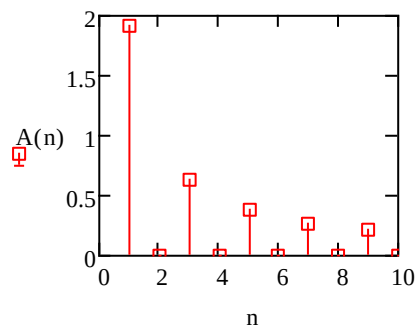
$$p(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^3 (a(n) \cdot \cos(n \cdot \omega_1 \cdot t) + b(n) \cdot \sin(n \cdot \omega_1 \cdot t))$$

t := 0..12



n := 1..10

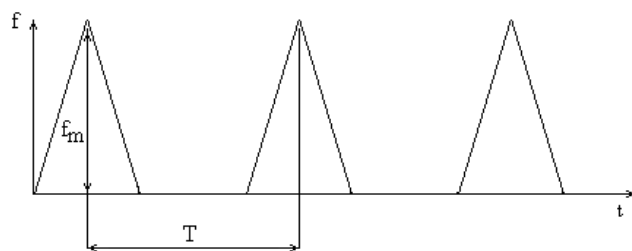
$$A(n) := \sqrt{a(n)^2 + b(n)^2}$$



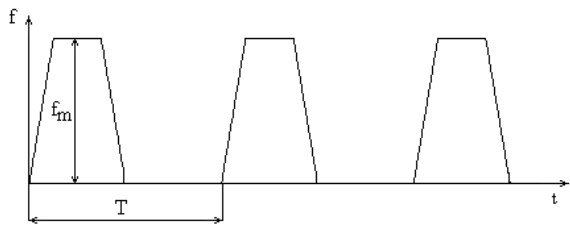
Задания:

Разложить в ряд Фурье и определить амплитудный спектр следующие сигналы:

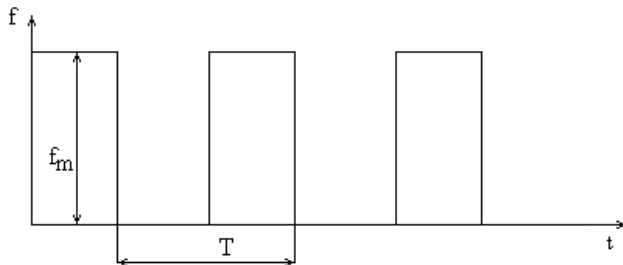
1.



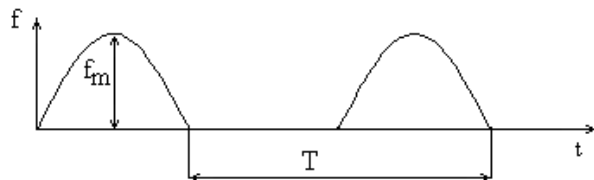
2.



3.



4.



$f_m = NT = N$, где N – номер варианта

Практическая работа №4 Исследование электростатических полей в зависимости от различного распределения зарядов

Для заданного распределения зарядов в пространстве задача определения поля в общем случае сводится к решению уравнения Пуассона:

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon \varepsilon_0},$$

где ρ - плотность заряда,

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа (записан для декартовой системы координат),

$\vec{E} = -\text{grad} \varphi = -\nabla \varphi$ - напряженность электрического поля.

Для решения уравнения Пуассона с помощью пакета MathCAD предназначена функция $\text{relax}(a, b, c, d, e, f, u, rjac)$, реализующая метод релаксации.

Уравнение Пуассона может быть сведено к уравнению в конечных разностях

$$a_{i,j} \cdot u_{i+1,j} + b_{i,j} \cdot u_{i-1,j} + c_{i,j} \cdot u_{i,j+1} + d_{i,j} \cdot u_{i,j-1} + e_{i,j} \cdot u_{i,j} = f_{i,j}$$

где коэффициенты

$$a_{i,j} = b_{i,j} = c_{i,j} = d_{i,j} = 1, e_{i,j} = -4$$

f – квадратная матрица, содержащая значения правой части уравнения в каждой точке внутри некоторой области

u – квадратная матрица, содержащая граничные значения функции на краях области, а также начальное приближение решения во внутренних точках области.

$rjac$ – параметр, управляющий сходимостью процесса релаксации. Он может быть в диапазоне от 0 до 1 (оптимальное значение выбирают в зависимости от деталей задачи).

Необходимо отметить, что решение уравнения Пуассона (численное или аналитическое) требуется в тех случаях, когда заряды распределены сложным образом в

пространстве. В простейших случаях, например определение поля точечного заряда, диполя, заряженной плоскости и т.д., достаточно воспользоваться законом Кулона, принципом суперпозиции, теоремой Гаусса.

Пример 2.1. Определим поле точечного заряда в вакууме с уравнения Пуассона.

Задаём область:

$$N := 20$$

$$x := 0..N \quad y := 0..N$$

Функцию распределения заряда по области:

$$\rho_{x,y} := 0$$

$$\rho_{5,5} := 2 \cdot 10^{-5}$$

$$f := -\frac{\rho}{2 \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0}$$

Коэффициенты уравнения:

$$a_{x,y} := 1$$

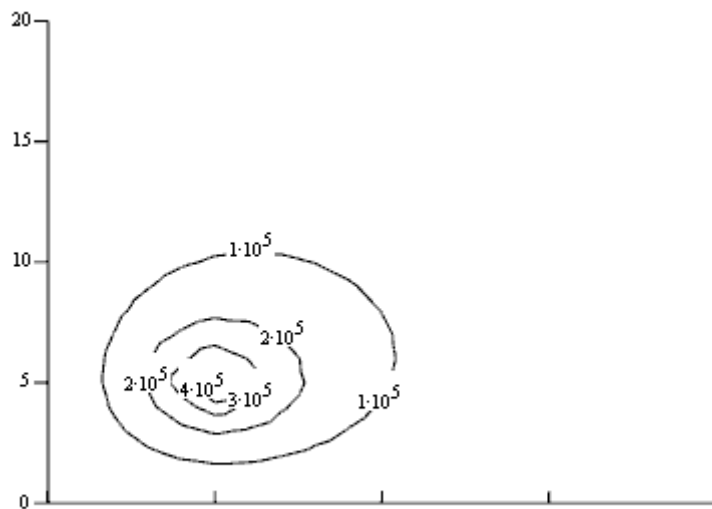
$$b := a \quad c := a \quad d := a \quad e := -4 \cdot a$$

Граничные значения функции на краях области и начальные приближения:

$$u_{x,y} := 0$$

Получим:

$$\phi := \text{relax}(a, b, c, d, e, f, u, 0.95)$$



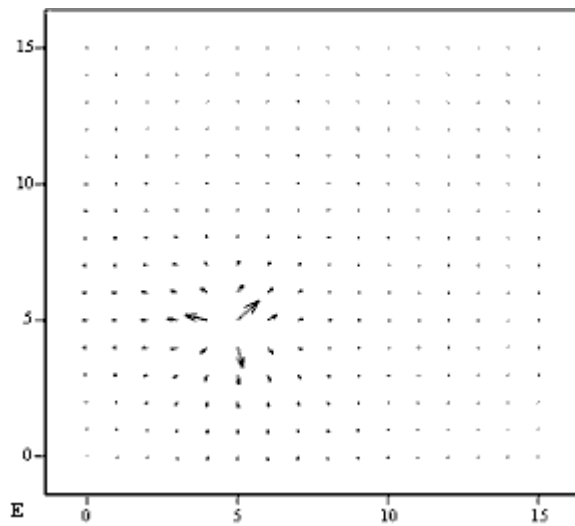
ϕ

Построим векторное поле линий напряжённости:

$$\vec{E} = -\nabla \phi$$

$$x := 0..15 \quad y := 0..15$$

$$E_{x,y} := -[\phi_{x+1,y} - \phi_{x,y} + i \cdot (\phi_{x,y+1} - \phi_{x,y})]$$

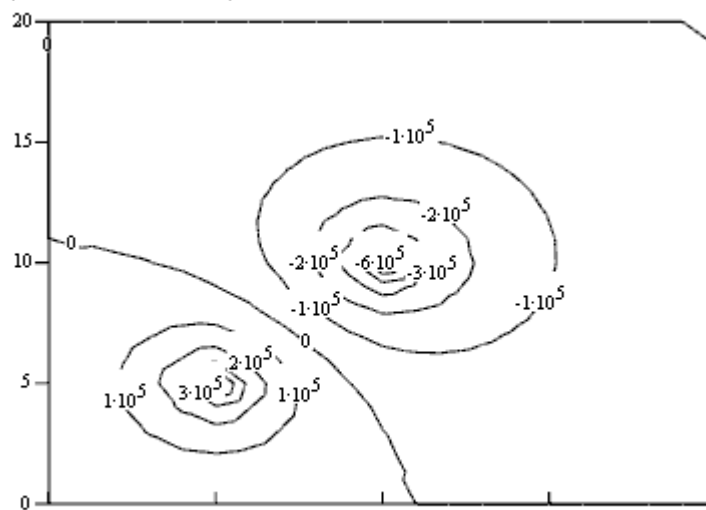


Пример 2.2. Определим поле двух точечных зарядов.

```

N := 20
x := 0..N    y := 0..N
ρx,y := 0
ρ5,5 := 2 · 10-5      ρ10,10 := -2 · 10-5
f := -  $\frac{\rho}{2 \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0}$ 
ax,y := 1
b := a      c := a      d := a      e := -4 · a
ux,y := 0
φ := relax(a,b,c,d,e,f,u,0.95)

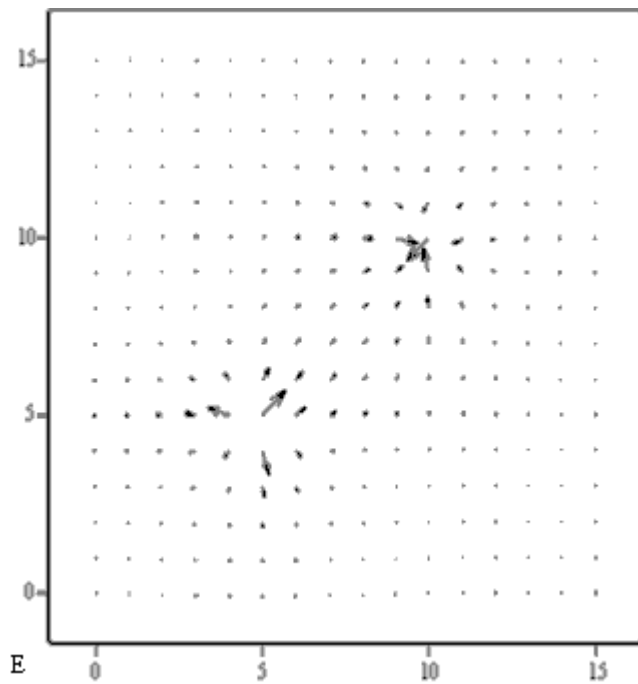
```



```

φ
x := 0..15    y := 0..15
Ex,y := -[φx+1,y - φx,y + i · (φx,y+1 - φx,y)]

```



Задания:

Для области размером 20 x 20:

1. Рассмотреть поле точечного заряда $q = (-1)^N \cdot N \cdot 10^{-6}$ Кл. Получить эквипотенциальные поверхности и линии напряженности обычным способом и с помощью уравнения Пуассона.
2. Рассмотреть поле двух точечных зарядов $q_1 = (-1)^{2N} \cdot N \cdot 10^{-6}$ Кл и $q_2 = (-1)^{3N} \cdot N \cdot 10^{-6}$ Кл. Получить эквипотенциальные линии и линии напряженности.
3. Рассмотреть поле трёх точечных зарядов $q_1 = (-1)^{2N} \cdot N \cdot 10^{-6}$ Кл и $q_2 = (-1)^{3N} \cdot N \cdot 10^{-6}$ Кл $q_3 = (-1)^{3N} \cdot N \cdot 10^{-6}$ Кл. Получить эквипотенциальные линии и линии напряженности.

Для области размером 40x40:

4. Рассмотреть поле заряженной пластины $\rho = (-1)^N \cdot N \cdot 10^{-10}$. Получить эквипотенциальные линии и линии напряженности.
5. Рассмотреть поле двух параллельных заряженных пластин $\rho = (-1)^N \cdot N \cdot 10^{-10}$ и $\rho_2 = (-1)^{N+1} \cdot N \cdot 10^{-10}$. Получить эквипотенциальные линии и линии напряженности.

Где N – номер варианта.

Тема: «Решение задач теплофизики в пакетах конечно-элементного анализа»

Лабораторная работа №5

Распространение электромагнитных волн в прямоугольном волноводе

Прямоугольный волновод, металлическая труба прямоугольного поперечного сечения. В идеальном случае оболочка волновода обладает бесконечно большой проводимостью, а внутренняя среда является однородной и изотропной, характеризуется значениями $\varepsilon = \text{const}$, $\mu = 1$. Такая математическая модель в большинстве случаев оказывается удовлетворительной.

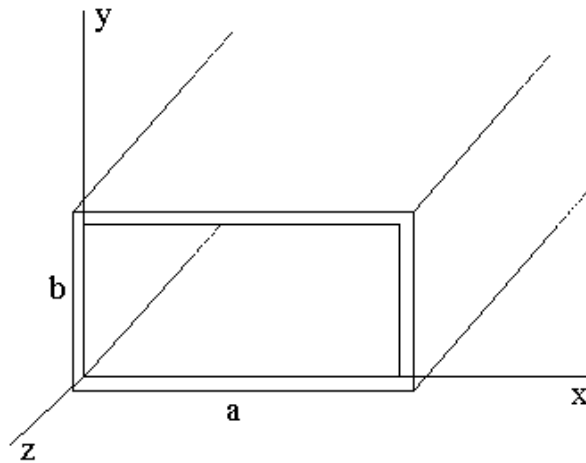


Рисунок 1. – Прямоугольный волновод

В этом случае в волноводе могут существовать только волны классов Е и Н. Рассматривая Е – волны, решают следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_{zm}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_{zm}}{\partial y^2} + \chi^2 \dot{E}_{zm} = 0, \quad (1)$$

где $E_z = 0$ на границе с проводником.

Решение данной задачи имеет вид:

$$\begin{aligned} E_z^{mn} &= E_0^{mn} \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}\right) \cdot \sin(\omega \cdot t - \beta_{mn} \cdot z) \\ \chi_{mn}^2 &= \frac{m^2 \cdot \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \cdot \pi^2}{b^2} \\ m &= 1, 2, \dots; n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2)$$

Где E_0^{mn} - неопределённые коэффициенты (они зависят от величины полной энергии передаваемой волной).

С помощью уравнений Максвелла определяют остальные компоненты поля Е – волны:

$$\begin{aligned} E_x^{mn} &= E_0^{mn} \cdot \frac{\beta_{mn}}{\chi_{mn}^2} \cdot \frac{m \cdot \pi}{a} \cdot \cos\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}\right) \cdot \sin\left(\omega \cdot t - \beta_{mn} \cdot z - \frac{\pi}{2}\right) \\ E_y^{mn} &= E_0^{mn} \cdot \frac{\beta_{mn}}{\chi_{mn}^2} \cdot \frac{n \cdot \pi}{b} \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}\right) \cdot \sin\left(\omega \cdot t - \beta_{mn} \cdot z - \frac{\pi}{2}\right) \\ H_x &:= E_0^{mn} \cdot \frac{\omega \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon}{\chi_{mn}^2} \cdot \frac{n \cdot \pi}{b} \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}\right) \cdot \sin\left(\omega \cdot t - \beta_{mn} \cdot z + \frac{\pi}{2}\right) \\ H_y &:= E_0^{mn} \cdot \frac{\omega \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon}{\chi_{mn}^2} \cdot \frac{m \cdot \pi}{a} \cdot \cos\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}\right) \cdot \sin\left(\omega \cdot t - \beta_{mn} \cdot z + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Где $\varepsilon_0 := 8.85 \cdot 10^{-12}$ Ф/М, $\mu_0 := 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$ ГН/М, $c := 3 \cdot 10^8$ М/с, $v := \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \cdot \mu}}$, $\omega := 2 \cdot \pi \cdot f$, $k := \frac{\omega}{v}$

$$\beta_{mn} = \sqrt{k^2 - \chi_{mn}^2} \quad (4)$$

Анализ Н – волн требует решения уравнения:

$$\frac{\partial^2 \dot{H}_{zm}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_{zm}}{\partial y^2} + \left(\Gamma^2 + \frac{\omega^2}{v^2} \right) \dot{H}_{zm} = 0 \quad (5)$$

где $\partial H_z / \partial n = 0$ на границе с проводником (по нормали к данной границе)

Решение данной задачи имеет вид:

$$H_z^{mn} = H_0^{mn} \cdot \cos\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}\right) \cdot \sin(\omega \cdot t - \beta_{mn} \cdot z)$$

$$\chi_{mn}^2 = \frac{m^2 \cdot \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \cdot \pi^2}{b^2}$$

$$m = (0), 1, 2, \dots; n = (0), 1, 2, \dots$$

Где H_0^{mn} - неопределённые коэффициенты

С помощью уравнений Максвелла определяют остальные компоненты поля Е – волны:

$$H_x^{mn} = H_0^{mn} \frac{\beta_{mn}}{\chi_{mn}^2} \frac{m\pi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \sin\left(\omega t - \beta_{mn} z + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$H_y^{mn} = H_0^{mn} \frac{\beta_{mn}}{\chi_{mn}^2} \frac{n\pi}{b} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin\left(\omega t - \beta_{mn} z + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$E_x^{mn} = H_0^{mn} \frac{\omega \mu_0}{\chi_{mn}^2} \frac{n\pi}{b} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin\left(\omega t - \beta_{mn} z + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$E_y^{mn} = H_0^{mn} \frac{\omega \mu_0}{\chi_{mn}^2} \frac{m\pi}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin\left(\omega t - \beta_{mn} z - \frac{\pi}{2}\right)$$

Полученные решения показывают, что прямоугольному волноводу свойственно бесконечное множество свободных полей класса Е и Н, которые определяются числами m и n. Однако для данной частоты только для некоторых достаточно малых m и n будет выполнено условие (4). Это позволяет ввести некоторую величину, называемую критической частотой и определяемую из следующих формул:

$$\beta_{mn} = k \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{f_{KP}^{mn}}{f}\right)^2} \quad f_{KP}^{mn} = \frac{v}{2 \cdot \pi} \cdot \chi_{mn} \quad (8)$$

Типы поля, для которых выполняется условие $f > f_{KP}$, имеет характер распространяющихся волн. Все остальные типы поля (m и n), составляющие бесконечное множество, энергии не переносят и экспоненциально затухают. Другими словами, передача энергии не возможна, если $f < f_{KP}$.

Особую роль играет тип волны с наименьшей критической частотой $\min f_{KP}$. Если $a > b$ (рис. 1), то

$$f_{KP}^{mn} = f_{KP}^{10} = \frac{v}{2 \cdot a}$$

Этот минимум реализуется в классе Н (см. выбор чисел m и n в формулах (6)). Волна H_{10} , обладающая наименьшей критической частотой называется **основной волной**

прямоугольного волновода. Для переноса энергии основной волной необходимо соблюдать следующее условие:

$$f > f_{\text{КР}}^{10} \quad \text{при} \quad f < f_{\text{КР}}^{\text{mn}}$$

Пример 6.1: Рассмотрим с помощью пакета MathCAD строение электромагнитных полей в классе ТМ (Е – волны). Здесь простейшим является случай волны E_{11} .

Дано: Длина и ширина поперечного сечения волновода:

$$a := 45 \cdot 10^{-3} \text{ м} \quad b := 35 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

Параметры среды примем: $\varepsilon := 1$ $\mu := 1$

Определим коэффициент $E_0 := 1$

Частота $f := 12 \cdot 10^9$ Гц

Тип волны $m = 1$ и $n = 1$

$$\mu_0 := 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м} \quad \varepsilon_0 := 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м} \quad c := 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$$

$$v := \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \cdot \mu}} \quad \omega := 2 \cdot \pi \cdot f$$

$$\chi := \sqrt{\frac{m^2 \cdot \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \cdot \pi^2}{b^2}} \quad k := \frac{\omega}{v}$$

$$\beta := \sqrt{k^2 - \chi^2}$$

Проверяем выполнение условия (4): $f_{\text{КР}} := \frac{v}{2 \cdot \pi} \cdot \chi$, $f_{\text{КР}} = 5.429 \times 10^9$ Гц;

Следовательно условие $f > f_{\text{КР}}$ выполняется.

$$\text{Длина волны: } \lambda := \frac{2 \cdot \pi}{\beta}$$

$$E_z(x, y, z, t) := E_0 \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}\right) \cdot \sin(\omega \cdot t - \beta \cdot z)$$

$$E_x(x, y, z, t) := E_0 \cdot \frac{\beta}{\chi^2} \cdot \frac{m \cdot \pi}{a} \cdot \cos\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}\right) \cdot \sin\left(\omega \cdot t - \beta \cdot z - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$E_y(x, y, z, t) := E_0 \cdot \frac{\beta}{\chi^2} \cdot \frac{n \cdot \pi}{b} \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}\right) \cdot \sin\left(\omega \cdot t - \beta \cdot z - \frac{\pi}{2}\right)$$

Построим «мгновенный снимок» векторных линий напряжённости электрического поля при $t = 0$ в поперечной плоскости ХУ при $z = 0$

$$N := 20 \quad i := 0..N \quad j := 0..N \quad x_i := \frac{a}{N} \cdot i \quad y_j := \frac{b}{N} \cdot j$$

$$E_{x_{i,j}} := E_x(x_i, y_j, 0, 0) \quad E_{y_{i,j}} := E_y(x_i, y_j, 0, 0)$$

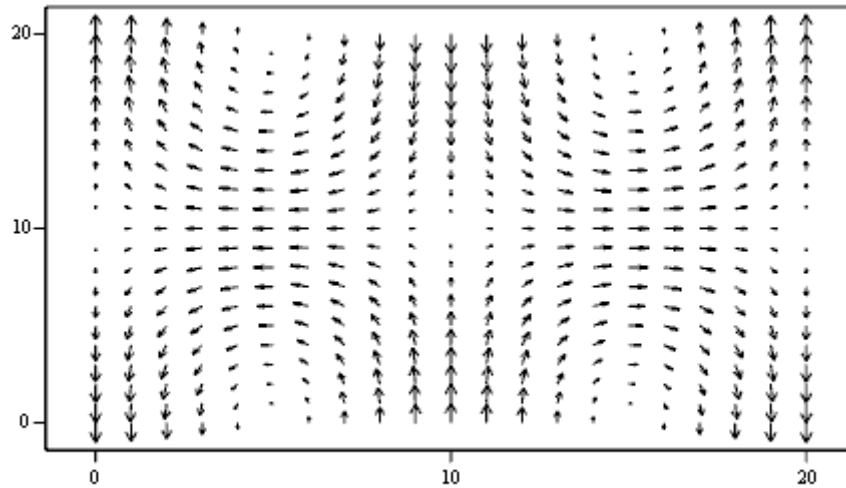
$$E_{i,j} := E_{x_{i,j}} + \sqrt{-1} \cdot E_{y_{i,j}}$$

Для продольной плоскости YZ при $x = a/2$ в пределах от $z = 0$ до $z = \lambda$:

$$N := 20 \quad i := 0..N \quad j := 0..N \quad z_i := \frac{\lambda}{N} \cdot i \quad y_j := \frac{b}{N} \cdot j$$

$$E_{z_{i,j}} := Ez\left(\frac{a}{2}, y_j, z_i, 0\right) \quad E_{y_{i,j}} := Ey\left(\frac{a}{2}, y_j, z_i, 0\right)$$

$$E_{i,j} := E_{z_{i,j}} + \sqrt{-1} \cdot E_{y_{i,j}}$$



Е

Картина векторных линий в продольной плоскости XZ аналогична.

Аналогично строим векторные линии магнитного поля при $t = 0$ в поперечной плоскости XY при $z = 0$

$$H_x(x, y, z, t) := E0 \cdot \frac{\omega \cdot \varepsilon0 \cdot \varepsilon}{\chi^2} \cdot \frac{n \cdot \pi}{b} \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}\right) \cdot \sin\left(\omega \cdot t - \beta \cdot z + \frac{\pi}{2}\right)$$

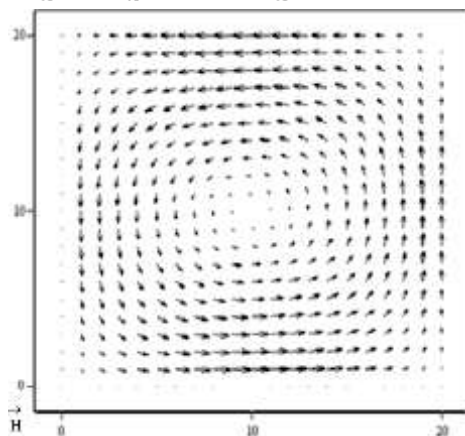
$$H_y(x, y, z, t) := E0 \cdot \frac{\omega \cdot \varepsilon0 \cdot \varepsilon}{\chi^2} \cdot \frac{m \cdot \pi}{a} \cdot \cos\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}\right) \cdot \sin\left(\omega \cdot t - \beta \cdot z - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$N := 20 \quad i := 1..N \quad j := 1..N$$

$$x_i := \frac{a}{N} \cdot i \quad y_j := \frac{b}{N} \cdot j$$

$$H_{x_{i,j}} := H_x(x_i, y_j, 0, 0) \quad H_{y_{i,j}} := H_y(x_i, y_j, 0, 0)$$

$$H_{i,j} := H_{x_{i,j}} + \sqrt{-1} \cdot H_{y_{i,j}}$$



Векторные линии магнитного поля расположены только в поперечных плоскостях.

Задания:

1. Для частоты $f = N$ ГГц (N - № варианта) построить поле E – волны. Тип поля определяется параметрами $m = 2 + (-1)^N$, $n = 2 + (-1)^{2N}$. Длина и ширина волновода должны быть выбраны так, чтобы выполнялось условие $f > f_{кр}$. Векторные линии напряженности электрического и магнитного полей должны быть представлены при $t = 0$ в плоскостях а) XY при $z = 0$, б) YZ при $x = a/2$, в) XZ при $y = b/2$
2. Для частоты $f = N$ ГГц построить поле H – волны. Тип поля H_{11} . Длина и ширина волновода должны быть выбраны так, чтобы выполнялось условие $f > f_{кр}$. Векторные линии напряженности электрического и магнитного полей должны быть представлены при $t = 0$ в плоскостях а) XY при $z = 0$, б) YZ при $x = a$, в) XZ при $y = b$
3. Рассмотреть случай переноса энергии основной волной H_{10} , воспользовавшись условием (10) для заданной частоты $f = N$ ГГц

Перечень экзаменационных вопросов

1. Предмет математического моделирования в физике.
2. Виды математических моделей.
3. Дифференциальные модели.
4. Стохастические и детерминистические модели.
5. Методы оптимизации.
6. Фундаментальные экспериментально-статистические модели и методы.
7. Математическое моделирование в физике: численный эксперимент в задачах механики.
8. Математическое моделирование в физике: численный эксперимент в задачах термодинамики.
9. Математическое моделирование в физике: численный эксперимент в задачах электродинамики.
10. Математическое моделирование в физике: численный эксперимент в задачах оптики.
11. Математическое моделирование в физике: численный эксперимент в задачах квантовой физики.
12. Математическое моделирование в физике: численный эксперимент в задачах статистической физики.
13. Использование программных пакетов для решения физических задач.
14. Моделирование физических опытов.
15. Физические эксперименты на компьютере.

Таблица 9 - Примеры оценочных средств с ключами правильных ответов

№ п/п	Тип задания	Формулировка задания	Правильный ответ	Время выполнения (в минутах)
ПК 4				
1)	Задание закрытого типа	Что такое метод сеток? 1. Решение дифференциальных уравнений в частных производных. 2. Решение интегральных уравнений. 3. Правая конечная разность. 4. Функция двух переменных.	1, Решение дифференциальных уравнений в частных производных	1
2)		Для решения уравнения Пуассона с помощью пакета MathCAD предназначена функция:	1	1

№ п/п	Тип задания	Формулировка задания	Правильный ответ	Время выполнения (в минутах)
		1. relax(a, b, c, d, e, f, u, rjas). 2. f . 3. u. 4. rjas.		
3)		Для создания условных выражений используют функцию: 1.ceil(x) 2. floor(x) 3. mod(x,y) 4. if	4	1
4)		Что позволяет решать функция rkfixed: 1. Стандартные математические задачи. 2. Линейные уравнения. 3. Матрицы. 4. Обыкновенные дифференциальные уравнения численным методом Рунге-Кутты	4	1
5)		Оператор, который служит для организации циклов с заданным числом повторений: 1. for 2. while 3. return 4. error	1	1
6)	Задание открытого типа	Что такое эффект Кóндо ?	Эффект увеличения электрического сопротивления слаболегированных магнитными примесями немагнитных металлических сплавов при температурах, близких к абсолютному нулю. Назван в честь японского физика Дзюна Кондо (англ. <i>Jun Kondo</i>), давшего явлению теоретическое обоснование. Соответствующую температурную и энергетическую шкалу называют <i>температурой Кондо</i> .	3
7)		Что такое конденса́т Бо́зе — Эйнште́йна?	Конденса́т Бо́зе — Эйнште́йна (бóзе-эйнште́иновский конденса́т, бóзе-конденса́т) — агрегатное состояние вещества, основу которого составляют бозоны, охлаждённые до температур, близких к абсолютному нулю (меньше миллионной доли кельвина). В таком	5

№ п/п	Тип задания	Формулировка задания	Правильный ответ	Время выполнения (в минутах)
			сильно охлаждённом состоянии достаточно большое число атомов оказывается в своих минимально возможных квантовых состояниях, и квантовые эффекты начинают проявляться на макроскопическом уровне.	
8)		В чем состоит отличие Mathcad от других аналогичных систем?	Основное отличие Mathcad от аналогичных программ - это графический, а не текстовый режим ввода выражений. Для набора команд, функций, формул можно использовать как клавиатуру, так и кнопки на многочисленных специальных панелях инструментов. В любом случае -- формулы будут иметь привычный, аналогичный книжному, вид. То есть особой подготовки для набора формул не нужно. Вычисления с введенными формулами осуществляются по желанию пользователя или мгновенно, одновременно с набором, либо по команде. Обычные формулы вычисляются слева направо и сверху вниз (подобно чтению текста). Любые переменные, формулы, параметры можно изменять, наблюдая воочию соответствующие изменения результата.	5
9)		Что называется идентификатором в системе Mathcad и каковы правила его формирования?	Имена констант, переменных и иных объектов называют идентификаторами. Тип переменной определяется ее значением; переменные могут быть числовыми, строковыми, символьными и т. д. Идентификаторы в системе MathCAD могут иметь практически любую длину, и в них могут входить любые латинские и греческие буквы, а также цифры.	5

№ п/п	Тип задания	Формулировка задания	Правильный ответ	Время выполнения (в минутах)
10)		Как построить двухмерный график в декартовой системе координат	MathCAD позволяет легко строить двух- и трехмерные гистограммы, двухмерные графики в декартовых и полярных координатах, трехмерные графики поверхностей, линии уровня поверхностей, изображения векторных полей, пространственные кривые. При выполнении команды Inset -> Graph -> Plot в документ помещается рамка-шаблон с двумя незаполненными ячейками для построения графика.	5

7.4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности.

Устный экзамен проводится преподавателем по вопросам, которые составляются с учетом пройденного материала. Студент, имеющий все оценки за лабораторные работы на практических занятиях, имеет возможность на получение оценки за итоговый экзамен равной накопленной без непосредственной сдачи. При желании получить более высокую итоговую оценку студент приступает к сдаче экзамена; ему предлагается для ответа один вопрос.

В конце изучения дисциплины подводятся итоги работы студентов на и практических занятиях путем суммирования заработанных баллов в течение семестра.

Таблица 10 - Технологическая карта рейтинговых баллов по дисциплине (модулю)

№ п/п	Контролируемые мероприятия	Количество мероприятий / баллы	Максимальное количество баллов	Срок представления
Основной блок				
•	Ответ на занятии		20	
•	Выполнение практического задания		20	
•	...			
Всего			40	-
Блок бонусов				
•	Посещение занятий		5	
•	Своевременное выполнение всех заданий		5	
•	...			
Всего			10	-
Дополнительный блок**				

№ п/п	Контролируемые мероприятия	Количество мероприятий / баллы	Максимальное количество баллов	Срок представления
•	Экзамен		50	
Всего			50	-
ИТОГО			100	-

Таблица 11 - Система штрафов (для одного занятия)

Показатель	Балл
Опоздание на занятие	-...1
Нарушение учебной дисциплины	-...1
Неготовность к занятию	-...1
Пропуск занятия без уважительной причины	-...1
...	-...1

Таблица 12 - Шкала перевода рейтинговых баллов в итоговую оценку за семестр по дисциплине (модулю)

Сумма баллов	Оценка по 4-балльной шкале	
90–100	5 (отлично)	Зачтено
85–89	4 (хорошо)	
75–84		
70–74		
65–69	3 (удовлетворительно)	
60–64		
Ниже 60	2 (неудовлетворительно)	Не зачтено

Преподаватель, реализующий дисциплину (модуль), в зависимости от уровня подготовленности обучающихся может использовать иные формы, методы контроля и оценочные средства, исходя из конкретной ситуации.

8. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

8.1. Основная литература

1.Плис А.И., Сливина Н.А. Mathcad. Математический практикум для инженеров и экономистов: Учебное пособие. – 2-е изд., перераб., доп.- М.: Финансы и статистика, 2020.- 656 с.

2.Малютин В.М., Скларова Е.А. Компьютерное моделирование физических явлений. Учебное пособие. Томск: Издательство ТПУ, 2020. - 156 с.

3. Королев А.Л. Компьютерное моделирование.– М: Бином, 2020. – 230 с.

4. Математическое и компьютерное моделирование. Вводные курсы: Учебное пособие. – М.: Едиториал УРСС, 2021. – 144 с.

5. Математическое и компьютерное моделирование: Вводный курс. – М.: Едиториал УРСС, 2023. – 144 с.

6. Стародубцев В.А., Заусаева Н.Н. Компьютерное моделирование процессов движения: Учебное пособие. – Томск: Изд.-во ТПУ, 2021. – 80 с.

7. Белащенко, Д. К. Компьютерные методы в физике и физической химии : лабораторный практикум / Д. К. Белащенко. — Москва : Издательский Дом МИСиС, 2022. — 109 с. — ISBN 2227-8397. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/56068.html>

8.2. Дополнительная литература

8. Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем. – М.: Наука, 1998.

9. Хеерман Д.В. Методы компьютерного эксперимента в теоретической физике. – М.: Наука, 1990. – 176 с.

10. Черевко, А. Г. Физика конденсированного состояния. Лабораторный практикум : методическое пособие / А. Г. Черевко, А. И. Гулидов. — Новосибирск : Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики, 2017. — 128 с. — ISBN 2227-8397. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/78151.html>

8.3. Интернет-ресурсы, необходимые для освоения дисциплины (модуля)

Электронная библиотечная система IPRbooks. www.iprbookshop.ru

9. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

В дисциплине современные информационные технологии представляются как инструмент, например, программные средства MatLab, MatCad, Excel и др. – как средство выполнения расчетов, анализа, принятия решения; PowerPoint 2003 как средство для чтения лекций, проведения практических занятий и др.

Рабочая программа дисциплины (модуля) при необходимости может быть адаптирована для обучения (в том числе с применением дистанционных образовательных технологий) лиц с ограниченными возможностями здоровья, инвалидов. Для этого требуется заявление обучающихся, являющихся лицами с ограниченными возможностями здоровья, инвалидами, или их законных представителей и рекомендации психолого-медико-педагогической комиссии. Для инвалидов содержание рабочей программы дисциплины (модуля) может определяться также в соответствии с индивидуальной программой реабилитации инвалида (при наличии).