

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Астраханский государственный университет имени В. Н. Татищева»
(Астраханский государственный университет им. В. Н. Татищева)

СОГЛАСОВАНО
Руководитель ОПОП

_____ М.В. Коломина

«29» августа 2023 г.

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой ФМО

_____ И.А. Байгушева

«29» августа 2023 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ЕСТЕСТВОЗНАНИИ**

Составитель	Коломина М.В, к. ф.-м. н., доцент кафедры ФМО
Направление подготовки/ специальность	01.03.02. ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
Направленность (профиль) ОПОП	
Квалификация (степень)	бакалавр
Форма обучения	очная
Год приема	2021
Курс	3, 4
Семестры	6-7

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

1.1. Целями освоения дисциплины «Математические модели в естествознании» является знакомство студентов с современными направлениями исследований в естествознании, использующими методы математического моделирования, а также с некоторыми классическими примерами математических моделей процессов, использующих аппарат нелинейных динамических систем, отражающих характерные особенности процессов и демонстрирующих эффективность использования математических моделей для понимания механизмов функционирования различных систем.

1.2. Задачи освоения дисциплины:

- изучить методы качественного анализа динамических систем;
- познакомить с классическими моделями в естествознании продемонстрировать
- значение математического и компьютерного моделирования для понимания природы биологических процессов и функционирования биологических систем;
- сформировать навыки самостоятельного исследования

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП

2.1 Учебная дисциплина «Математические модели в естествознании» относится к части, формируемой участниками образовательных отношений и осваивается в 6-7 семестрах.

2.2. Для изучения данной учебной дисциплины необходимы следующие знания, умения, навыки, формируемые предшествующими учебными дисциплинами:

- Математический анализ-I,
- Математический анализ-II,
- Алгебра и геометрия,
- Дифференциальные уравнения,
- Физика.

2.3. Последующие учебные дисциплины и (или) практики, для которых необходимы знания, умения, навыки, формируемые данной учебной дисциплиной:

- написание бакалаврской работы,
- преддипломная практика.

3. ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование элементов следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО и ОПОП ВО по данному направлению подготовки (специальности):

- а) универсальных (УК):
- Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач (УК-1);
- б) профессиональных (ПК):
- способность собирать, обрабатывать, интерпретировать данные и проводить под руководством научное исследование в области математических и (или) естественных наук (ПК-1).

Таблица 1. Декомпозиция результатов обучения

Код компетенции	Планируемые результаты освоения дисциплины		
	Знать (1)	Уметь (2)	Владеть (3)
УК-1 УК-1.1. Выполняет поиск необходимой информации, её крити-	ИУК-1.1.1 основы современных технологий сбора, обработки и представления информации,	ИУК-1.1.2 осуществлять поиск информации; выделять существенную информацию, обобщать и получать новые знания	ИУК-1.1.3 разными способами сбора, обработки и представления информации; навыком крити-

ческий анализ и обобщает результаты анализа для решения поставленной задачи.	основные принципы критического анализа	на основе полученных результатов	ческого анализа и обобщения результатов анализа для решения поставленной задачи в области математического анализа
УК-1.2. Использует системный подход для решения поставленных задач	ИУК-1.2.1 основные понятия, базовый математический аппарат связанный с прикладной математикой и информатикой	ИУК-1.2.2 проводить исследование проблемы профессиональной деятельности с применением анализа; синтеза и других методов интеллектуальной деятельности; выявлять научную проблему, подбирать методы для ее решения.	ИУК-1.2.3 навыками решения практических задач математики и информатики на основе системного подхода.
ПК-1	ИПК-1.1 обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук. Знает современные методы сбора и анализа полученного материала	ИПК-1.2 собирать и обрабатывать статистический, экспериментальный, теоретический, графический и т.п. материал, необходимый для построения математических моделей, расчетов и конкретных практических выводов, использовать методы прикладной математики и информатики для решения научно-исследовательских и прикладных задач	ИПК-1.3 практическим опытом оформления результатов научного труда в соответствии с современными требованиями

4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Объем дисциплины составляет 6 зачетных единиц, в том числе 99 часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (из них 18 часов – лекции, 45 часов – лабораторные работы, 36 часов – практические занятия), и 117 часов – на самостоятельную работу обучающихся.

Таблица 2. Структура и содержание дисциплины

№ п/п	Наименование раздела, темы	Семестр	Контактная работа (в часах)			Самостоят. работа		Формы текущего контроля успеваемости Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			Л	ПЗ	ЛР	КР	СР	
1	Раздел 1. Методы качественного анализа динамических систем	6	18	36			60	
2	Тема 1. Линейные системы на плоскости	6	6	9			15	Контрольная работа, коллоквиум, тестирование
3	Тема 2. Нелинейные системы на плоскости	6	5	9			15	
4	Тема 3. Устойчивость решений дифференциальных уравнений.	6	5	9			15	
5	Тема 4. Предельное поведение траекторий на плоскости	6	2	9			15	
6	Раздел 2. Лабораторный практикум «Дифференциальные модели»	7			45		57	Лабораторные работы
ИТОГО			18	36	45		117	ЗАЧЕТ, ЭКЗАМЕН

Условные обозначения:

Л – занятия лекционного типа; ПЗ – практические занятия, ЛР – лабораторные работы; КР – курсовая работа; СР – самостоятельная работа по отдельным темам

Содержание дисциплины

Раздел 1. Методы качественного анализа динамических систем

Введение. Существование и единственность решения системы дифференциальных уравнений. Непрерывная зависимость решения системы дифференциальных уравнений от начальных данных. Механический смысл нормальной системы и ее решения. Метод изоклин.

Автономные системы. Точка покоя, виды траекторий автономных систем. Особые точки автономного уравнения.

Тема 1. Линейные системы на плоскости. Особые точки автономной системы. Линейная замена переменных.

Тема 2. Нелинейные системы на плоскости. Локальное и глобальное поведение. Линеаризация в окрестности неподвижной точки. Теорема о линеаризации. Непростые неподвижные точки. Обыкновенные точки. Первые интегралы.

Тема 3. Устойчивость решений дифференциальных уравнений. Второй метод Ляпунова для установившихся движений. Определение устойчивости по Ляпунову. Теоремы Ляпунова об устойчивости движения. Теоремы Ляпунова о неустойчивости. Теорема Четаева. Построение функций Ляпунова для систем линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Критерий устойчивости по первому приближению Теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

Тема 4. Предельное поведение траекторий на плоскости. Функция последования. Критерии существования периодических решений.

Раздел 2. Лабораторный практикум

Таблица 3. Матрица соотношения разделов, тем учебной дисциплины и формируемых в них компетенций

Разделы, темы дисциплины	Кол-во часов	Компетенции		
		УК-1	ПК-1	Общее количество компетенций
Раздел 1.	114	+	+	2
Раздел 2.	102	+	+	2
Итого	216			

5. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРЕПОДАВАНИЮ И ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

5.1. Указания для преподавателей по организации и проведению учебных занятий по дисциплине

Лекционные занятия

Основной формой реализации теоретического обучения является лекция, которая представляет собой систематическое, последовательное изложение преподавателем-лектором учебного материала теоретического характера. Цель лекции – организация целенаправленной познавательной деятельности студентов по овладению программным материалом учебной дисциплины.

Порядок подготовки лекционного занятия включает в себя выполнение следующих этапов:

- изучение требований программы дисциплины,
- определение целей и задач лекции,
- разработка плана проведения лекции,
- подбор литературы (ознакомление с методической литературой, публикациями периодической печати по теме лекционного занятия),
- отбор необходимого и достаточного по содержанию учебного материала,
- определение методов, приемов и средств поддержания интереса, внимания, стимулирования творческого мышления студентов,
- написание конспекта лекции.

Лекция должна включать следующие разделы:

- формулировку темы лекции;
- указание основных изучаемых разделов или вопросов и предполагаемых затрат времени на их изложение;
- изложение вводной части;

- изложение основной части лекции;
- краткие выводы по каждому из вопросов;
- заключение;
- рекомендации литературных источников по излагаемым вопросам.

Практические занятия

Практические занятия – целенаправленная форма организации педагогического процесса, направленная на углубление научно-теоретических знаний и овладение определенными методами работы, в процессе которых вырабатываются умения и навыки выполнения тех или иных учебных действий в данной сфере науки. Они развивают научное мышление и речь, позволяют проверить знания студентов и выступают как средства оперативной обратной связи.

Правильно организованные практические занятия ориентированы на решение следующих задач:

- обобщение, систематизация, углубление, закрепление полученных на лекциях и в процессе самостоятельной работы теоретических знаний по дисциплине (предмету);
- формирование практических умений и навыков, необходимых в будущей профессиональной деятельности, реализация единства интеллектуальной и практической деятельности;
- выработка при решении поставленных задач таких профессионально значимых качеств, как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива.

Состав заданий для практического занятия должен быть спланирован с расчетом, чтобы за отведенное время они могли быть качественно выполнены большинством учащихся.

Практические занятия должны так быть организованы, чтобы студенты ощущали нарастание сложности выполнения заданий, испытывали бы положительные эмоции от переживания собственного успеха в учении, поисками правильных и точных решений.

Лабораторные занятия

Лабораторное занятие – целенаправленная форма организации педагогического процесса, направленная на углубление научно-теоретических знаний и овладение определенными методами работы, в процессе которых вырабатываются умения и навыки выполнения тех или иных учебных действий в данной сфере науки. Они развивают научное мышление и речь, позволяют проверить знания студентов и выступают как средства оперативной обратной связи.

Правильно организованные занятия ориентированы на решение следующих задач:

- обобщение, систематизация, углубление, закрепление полученных на лекциях и в процессе самостоятельной работы теоретических знаний по дисциплине (предмету);
- формирование практических умений и навыков, необходимых в будущей профессиональной деятельности, реализация единства интеллектуальной и практической деятельности;
- выработка при решении поставленных задач таких профессионально значимых качеств, как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива.

Самостоятельная работа

Самостоятельная работа – это вид учебной деятельности, которую студент совершает в установленное время и в установленном объеме индивидуально или в группе, без непосредственной помощи преподавателя (но при его контроле), руководствуясь сформированными ранее представлениями о порядке и правильности выполнения действий.

В учебном процессе образовательного учреждения выделяются два вида самостоятельной работы:

1) аудиторная – выполняется на учебных занятиях, под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию;

2) внеаудиторная – выполняется по заданию преподавателя, но без его непосредственного участия. Внеаудиторные самостоятельные работы представляют собой логическое продолжение аудиторных занятий, проводятся по заданию преподавателя, который инструктирует студентов и устанавливает сроки выполнения задания.

5.2. Указания для обучающихся по освоению дисциплины

Лекция. Как ее слушать и записывать

1. Лекция основной вид обучения в вузе.
2. В лекции излагаются основные положения теории, ее понятия и законы, приводятся факты, показывающие связь теории с практикой.
3. Накануне лекции необходимо повторить содержание предыдущей лекции, а затем посмотреть тему очередной лекции по программе (по плану лекций).
4. Полезно вести записи (конспекты) лекций: для непонятных вопросов оставлять место при работе над темой лекции с учебными пособиями.
5. Записи лекций следует вести в отдельной тетради, оставляя место для дополнений во время самостоятельной работы.
6. При конспектировании лекций выделяйте главы и разделы, параграфы, подчеркивайте основное.

Практическое занятие. Как к нему готовиться

1. Практическое занятие наиболее активный вид учебных занятий в вузе. Оно предполагает самостоятельную работу над лекциями и учебными пособиями.
2. К каждому практическому занятию нужно готовиться. Подготовку следует начинать с повторения теории (по записям лекций или по учебному пособию). После этого нужно решать задачи из предложенного домашнего задания.

Лабораторное занятие. Как к нему готовиться

1. Лабораторное занятие – наиболее активный вид учебных занятий в вузе. Он предполагает самостоятельную работу над лекциями и учебными пособиями.
2. К каждому лабораторному занятию нужно готовиться: повторять теорию (по записям лекций или по учебному пособию).

Организация самостоятельной работы

1. Бюджет времени студента определяется временем, отведенным на занятия по расписанию и на самостоятельную работу. Задание и материал для самостоятельной работы дается во время учебных занятий, на этих же занятиях преподаватель осуществляет контроль за самостоятельной работой.
2. Для выполнения объема самостоятельной работы необходимо заниматься в среднем 4 часа (академических) ежедневно, т.е. по 24 часа в неделю.
3. Начинать самостоятельные занятия следует с первых же дней семестра, установив определенный порядок, равномерный ритм на весь семестр. Полезно для этого составить расписание порядка дня.

Таблица 4. Содержание самостоятельной работы обучающихся

Номер раздела (темы)	Темы/вопросы, выносимые на самостоятельное изучение	Кол-во часов	Формы работы
Раздел 1.	Темы, рассматриваемые на аудиторных занятиях	60	Регулярное выполнение домашней работы: разбор лекционного материала, решение задач. Подготовка к контрольной работе, коллоквиуму
Раздел 2.	Лабораторные работы №1-8, представленные ниже	57	Исследование дифференциальных моделей, подготовка отчетов по лабораторным работам из представленного ниже списка

5.3. Виды и формы письменных работ, предусмотренных при освоении дисциплины, выполняемые обучающимися самостоятельно

Самостоятельное математическое исследование моделей.

6. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

При реализации различных видов учебной работы по дисциплине «Математические модели в естествознании» могут использоваться электронное обучение и дистанционные образовательные технологии.

6.1. Образовательные технологии

Таблица 5. Образовательные технологии, используемые при реализации учебных занятий

Раздел, тема дисциплины	Форма учебного занятия		
	Лекция	Практическое занятие, семинар	Лабораторная работа
Раздел 1.	Обзорная лекция, коллоквиум	Фронтальный опрос, выполнение практических заданий, дискуссии	Выполнение лабораторных работ
Раздел 2.	Проблемная лекция, коллоквиум	Фронтальный опрос, выполнение практических заданий, дискуссии	Выполнение лабораторных работ

Виды учебной работы: лекции, лабораторные работы, консультации, коллоквиумы, контрольные работы, самостоятельная работа.

Учебные занятия по дисциплине могут проводиться с применением информационно-телекоммуникационных сетей при опосредованном (на расстоянии) интерактивном взаимодействии обучающихся и преподавателя в режимах on-line или off-line в формах видеолекций, видеоконференции, собеседования в режиме чат, выполнения виртуальных лабораторных работ.

№	Интерактивные формы	Описание
1	Проблемная лекция	На этой лекции новое знание вводится через проблемность вопроса, задачи или ситуации. При этом процесс познания студентов в сотрудничестве и диалоге с преподавателем приближается к исследовательской деятельности. Содержание проблемы раскрывается путем организации поиска ее решения.
2	Коллоквиум	На коллоквиумах обсуждаются: отдельные части, разделы, темы, вопросы изучаемого курса. Коллоквиум проходит обычно в форме дискуссии, в ходе которой обучающимся предоставляется возможность высказать свою точку зрения на рассматриваемую проблему, учиться обосновывать и защищать ее. Аргументируя и отстаивая свое мнение, студент в то же время демонстрирует, насколько глубоко и осознанно он усвоил изученный материал.
3	Лабораторные занятия	Использование виртуальной лаборатории

6.2. Информационные технологии

- использование возможностей Интернета в учебном процессе;
- использование электронных учебников и различных сайтов;
- использование возможностей электронной почты;
- использование средств представления учебной информации (электронных учебных пособий и практикумов, применение новых технологий для проведения очных (традиционных) лекций и семинаров с использованием презентаций);
- использование системы управления обучением LMS Moodle и иных информационных систем, сервисов и мессенджеров.

6.3. Программное обеспечение, современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы

Учебные занятия по дисциплине могут проводиться с применением информационно-телекоммуникационных сетей при опосредованном (на расстоянии) интерактивном взаимодействии обучающихся и преподавателя в режимах on-line и off-line в формах видеоконференции, собеседования в режиме чат, выполнения виртуальных практических заданий.

6.3.1. Программное обеспечение

Наименование программного обеспечения	Назначение
Adobe Reader	Программа для просмотра электронных документов
Платформа дистанционного обучения LMS Moodle	Виртуальная обучающая среда
Microsoft Office 2013	Пакет офисных программ

6.3.2. Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы

1. Электронная библиотека «Астраханский государственный университет» собственной генерации на платформе ЭБС «Электронный Читальный зал – БиблиоТех». <https://biblio.asu.edu.ru>
2. Электронно-библиотечная система (ЭБС) ООО «Политехресурс» «Консультант студента». www.studentlibrary.ru.
3. Электронная библиотечная система издательства ЮРАЙТ, раздел «Легендарные книги». www.biblio-online.ru, <https://urait.ru/>
4. Электронно-библиотечная система BOOK.ru <https://book.ru>

7. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

7.1. Паспорт фонда оценочных средств

При проведении текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине «Математические модели в естествознании» проверяется сформированность у обучающихся компетенций, указанных в разделе 3 настоящей программы. Этапность формирования данных компетенций в процессе освоения образовательной программы определяется последовательным освоением дисциплин и прохождением практик, а в процессе освоения дисциплины – последовательным достижением результатов освоения содержательно связанных между собой разделов, тем.

Таблица 6. Соответствие разделов, тем дисциплины, результатов обучения по дисциплине и оценочных средств

№ п/п	Контролируемые разделы дисциплины	Код контролируемой компетенции (компетенций)	Наименование оценочного средства
1	Раздел 1. Методы качественного анализа динамических систем	УК-1, ПК-1	Контрольная работа, коллоквиум
2	Раздел 2. Дифференциальные модели		Лабораторные работы

7.2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций, описание шкал оценивания

Таблица 7. Показатели оценивания результатов обучения в виде знаний

Шкала оценивания	Критерии оценивания
5 «отлично»	демонстрирует глубокое знание теоретического материала, умение обоснованно излагать свои мысли по обсуждаемым вопросам, способность полно, правильно и аргументированно отвечать на вопросы, приводить примеры
4 «хорошо»	демонстрирует знание теоретического материала, его последовательное изложение, способность приводить примеры, допускает единичные ошибки, исправляемые после замечания преподавателя
3 «удовлетворительно»	демонстрирует неполное, фрагментарное знание теоретического материала, требующее наводящих вопросов преподавателя, допускает существенные ошибки в его изложении, затрудняется в приведении примеров и формулировке выводов
2 «неудовлетворительно»	демонстрирует существенные пробелы в знании теоретического материала, не способен его изложить и ответить на наводящие вопросы преподавателя, не может привести примеры

Таблица 8. Показатели оценивания результатов обучения в виде умений и владений

Шкала оценивания	Критерии оценивания
5 «отлично»	демонстрирует способность применять знание теоретического материала при выполнении заданий, последовательно и правильно выполняет задания, умеет обоснованно излагать свои мысли и делать необходимые выводы
4 «хорошо»	демонстрирует способность применять знание теоретического материала при выполнении заданий, последовательно и правильно выполняет задания, умеет обоснованно излагать свои мысли и делать необходимые выводы, допускает единичные ошибки, исправляемые после замечания преподавателя

3 «удовлетворительно»	демонстрирует отдельные, несистематизированные навыки, не способен применить знание теоретического материала при выполнении заданий, испытывает затруднения и допускает ошибки при выполнении заданий, выполняет задание при подсказке преподавателя, затрудняется в формулировке выводов
2 «неудовлетворительно»	не способен правильно выполнить задание

7.3. Контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Вопросы к зачету

1. Существование и единственность решения системы дифференциальных уравнений.
2. Непрерывная зависимость решения системы дифференциальных уравнений от начальных данных.
3. Механический смысл нормальной системы и ее решения.
4. Автономные системы.
5. Точка покоя, виды траекторий автономных систем.
6. Особые точки автономного уравнения.
7. Особые точки автономной системы. Случай действительных и различных корней характеристического уравнения.
8. Особые точки автономной системы. Случай действительных и кратных корней характеристического уравнения.
9. Особые точки автономной системы. Случай действительных корней характеристического уравнения, среди которых есть нулевые значения.
10. Особые точки автономной системы. Случай комплексных корней характеристического уравнения.
11. Преобразование осей координат.
12. Нелинейные системы на плоскости. Локальное и глобальное поведение
13. Линеаризация в окрестности неподвижной точки.
14. Теорема о линеаризации.
15. Непростые неподвижные точки. Обыкновенные точки.
16. Первые интегралы.

Вопросы к экзамену

1. Определение устойчивости по Ляпунову.
2. Признаки знакоопределенности и знакопеременности функций.
3. Первая теорема Ляпунова об устойчивости движения.
4. Вторая теорема Ляпунова об устойчивости движения.
5. Первая теорема Ляпунова неустойчивости.
6. Вторая теорема Ляпунова о неустойчивости. Теорема Четаева.
7. Построение функций Ляпунова для систем линейных уравнений с постоянными коэффициентами.
8. Уравнения первого приближения.
9. Теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению.
10. Предельное поведение траекторий на плоскости.
11. Функция последования.
12. Критерии существования периодических решений.

РАЗДЕЛ 1. МЕТОДЫ КАЧЕСТВЕННОГО АНАЛИЗА ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Примерная тематика контрольных работ

Введение

Контрольная работа № 1

1. Используя метод изоклин, построить интегральные кривые уравнения $\frac{dy}{dx} = 2x^2 - y + 2$.

2. Найти интервал существования решения задачи Коши $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = x + y - 2e^t, \end{cases} x(0) = 0, y(0) = 1.$
3. Являются ли уравнения качественно эквивалентными $\dot{y} = x, \dot{y} = x^3$.

Тема 1. Линейные системы на плоскости. Тема 2. Нелинейные системы на плоскости

Контрольная работа № 2

1. Определить вид особой точки автономной системы, построить фазовый портрет а)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y \\ \frac{dy}{dt} = 5x \end{cases} \quad \text{б)} \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y \\ \frac{dy}{dt} = -8x - 5y \end{cases}$$
2. Найти особые точки уравнения $y' = \frac{x^2 + y^2 - 2}{x - y}$, определить их характер.
3. Найти особые точки системы $\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y, \\ \dot{y} = x^2 - (y - 2)^2 \end{cases}$ построить локальные фазовые портреты, используя теорему о линеаризации.
4. Найти первые интегралы системы $\begin{cases} \dot{x} = x + z, \\ \dot{y} = y + z, \\ \dot{z} = x + y. \end{cases}$

Тема 3. Устойчивость решений дифференциальных уравнений. Тема 4. Предельное поведение траекторий

Контрольная работа № 3

1. Используя определение, исследовать на устойчивость систему $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$
2. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y \\ \dot{y} = 2x + y \end{cases}$
3. Исследовать на устойчивость по первому приближению нулевое решение системы $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y - \sin y^2, \\ \dot{y} = -x - 3y + x(e^{\frac{x^2}{2}} - 1). \end{cases}$
4. Найдите предельные циклы системы, определите их характер $\begin{cases} \dot{r} = (r^2 - 1)(2r - 1), \\ \dot{\phi} = 1. \end{cases}$

РАЗДЕЛ 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ

Лабораторные работы

Общие требования к уровню усвоения работы

В результате подготовки и выполнения работы студенты должны:

1. знать уравнение (-я), описывающее (-ие) модель;
2. знать смысл переменных и параметров уравнения (-й);
3. знать влияние изменения параметров модели на ее поведение;
5. уметь определять тип особых точек системы;
6. уметь описывать поведение системы по фазовому портрету;
7. уметь описывать поведение системы по графику зависимости.

Общие вопросы к лабораторным работам

1. Что описывает модель?
2. Какие эффекты учитывает модель?

3. Какие предположения используются при построении модели?
4. Каков смысл переменных модели? Каков смысл параметров модели?
5. Какие особые точки есть на фазовом портрете системы?
6. Каковы координаты особых точек?
7. Меняется ли тип особых точек при изменении параметров модели?
8. Каковы особые направления? Каковы асимптоты?
9. Есть ли на фазовом портрете изучаемой системы предельные циклы?
10. Возможны ли в рассматриваемой системе бифуркации? Если да, то при каких условиях?

Требования к оформлению отчета

Отчет по работе должен содержать:

1. математическое исследование модели, в результате, которого должны быть получены условия, того или иного фазового портрета.
2. фазовые портреты и графики зависимости в соответствии с возможными случаями;
3. подробные выводы о поведении системы для каждого случая;
4. ответы на вопросы.

Темы лабораторных занятий

Виртуальные лабораторные работы размещены по адресу <http://mathmod.aspu.ru/>

Лабораторная работа № 1. «Хищник–жертва», «Лотки Вольтерра»

Лабораторная работа № 2. «Модель межвидовой конкуренции»

Лабораторная работа № 3. «Модель Ван дер Поля»

Лабораторная работа № 4. «Модель Лефевра»

Лабораторная работа № 5. «Модель рынка энергоресурсов»

Пробные тесты

Если система $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by, \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases}$ имеет действительные корни характеристического уравнения, то возможны следующие фазовые портреты

☐ узел

☐ диригитический узел

☐ фокус

☐ седло

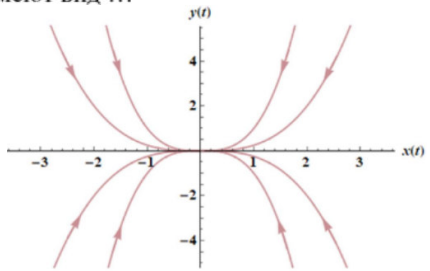
Линейная система $\begin{cases} \frac{dy}{dt} = ax + by, \\ \frac{dx}{dt} = cx + dy \end{cases}$ называется $\begin{cases} \text{простой} \\ \text{непростой} \end{cases}$, если

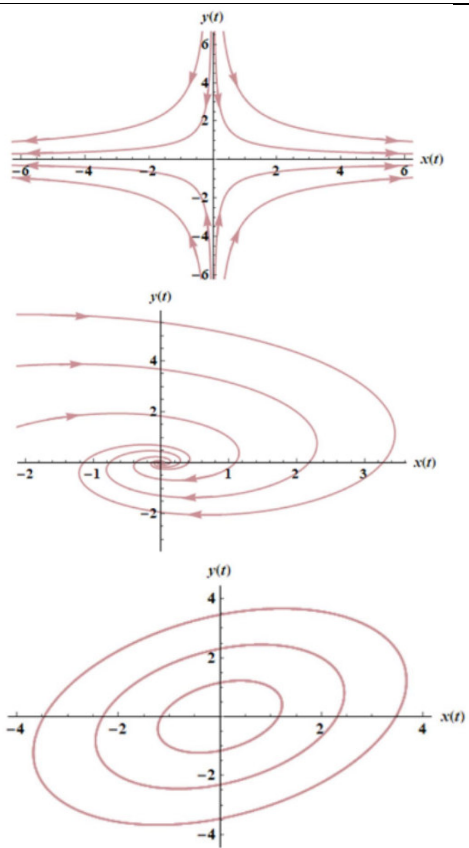
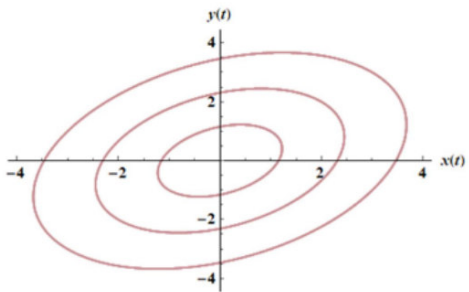
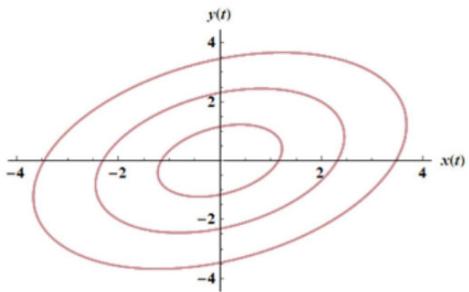
- ☐ определитель ее коэффициентов равен нулю ☐ определитель ее коэффициентов отличен от нуля
- ☐ мажоранта равна нулю ☐ мажоранта отлична от нуля

Найти особые точки уравнения $x' = x^3 - 2x^2 - 3x$ и определить их характер

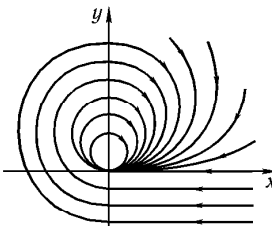
- ☐ аттрактор $x = 0$;
репеллер $x = -1$;
репеллер $x = 3$
- ☐ аттрактор $x = -1$;
шунт $x = 0$;
репеллер $x = 2$
- ☐ нет особых точек ☐ аттрактор $x = -1$;
репеллер $x = 0$

Таблица 9. Примеры оценочных средств с ключами правильных ответов

№ п/п	Тип задания	Формулировка задания	Правильный ответ	Время выполнения (в минутах)
Код и наименование проверяемой компетенции УК-1				
1.	Задание закрытого типа	Траектории вблизи точки равновесия $x = 0, y = 0$ системы $\begin{cases} x' = -x, \\ y' = -3y, \end{cases}$ имеют вид ... 	1	10

№ п/п	Тип задания	Формулировка задания	Правильный ответ	Время выполнения (в минутах)
		2.  3.  4. 		
5.		Динамическими не являются системы: 1. $y'_x = (x + y)/(x - y)$ 2. $y' + (\sin x)y = \cos x$ 3. $yy' = \sin x$ 4. $y' = y/x$	1, 3	10
5.		Динамическая система $\begin{cases} x' = 4x + y - 6 \\ y' = \ln(y - x^2) \end{cases}$ имеет положения равновесия ... 1. $(-5, 26)$ и $(1, 2)$ 2. $(5, 26)$ и $(-1, 2)$ 3. $(5, 26)$ и $(1, 2)$ 4. $(0, 5)$ и $(1, 2)$	1	10
5.		Если в окне Matchad диалога настройки параметров графика в декартовой или полярной системе координат щелкнуть по Traces (Следы), то ... Выберите верный вариант продолжения предложения. 1. можно изменить толщину и начертание линий графика 2. можно изменить заголовок и его расположение на графике 3. можно увеличить часть графика в нужной области можно изменить цвет заливки графика	1	5
6.		В Maple, для построения графиков функции $f(x)$ одной переменной (в интервале $a \leq x \leq b$ по оси Ox и в интервале $c \leq y \leq d$ по оси Oy) используется команда <u>plot</u> ($f(x), x=a..b,$	plot	5

№ п/п	Тип задания	Формулировка задания	Правильный ответ	Время выполнения (в минутах)
		y=c..d, parameters), где parameters – параметры управления изображением		
7.	Задание открытого типа	Найти особые точки системы, установить их тип $\begin{cases} \dot{x} = (x+y)^2 - 1, \\ \dot{y} = -y^2 - x + 1. \end{cases}$	(0, 1) и (0, -1) седла, (1, 0) фокус, (-3, 2) узел	10
8.		Характеристическим уравнением системы $\begin{cases} \frac{dy}{dt} = ax + by, \\ \frac{dx}{dt} = cx + dy \end{cases}$	$\lambda^2 - (b+c)\lambda + bc - ad = 0$	5
9.		В MathCAD функциями сортировки для векторов и матриц являются	sort, reverse, csort	5
10.		Чтобы вычислить определенный интеграл в MathCAD для того, чтобы создать оператор интегрирования, нужно ввести ..., заполнить поля ввода и вычислить выражение символьно.	&	5
Код и наименование проверяемой компетенции ПК-1				
11.	Задания открытого типа	Непериодическая траектория автономной системы $\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, K, x_n), \quad i = 1, 2, K, n,$ для которой $x(t_1) \neq x(t_2)$ при $t_1 \neq t_2$, называется также	Траекторией без самопересечений	
12.		Исследовать на устойчивость по первому приближению т.(0, 0) 913. $\begin{cases} \dot{x} = -x + 3y + x^2 \sin y, \\ \dot{y} = -x - 4y + 1 - \cos y^2. \end{cases}$	Устойчиво.	
13.	Задание открытого типа	Выяснить, при каких значениях параметра a нулевое решение является А) асимптотически устойчивым; Б) устойчивым, но не асимптотически; В) неустойчивым $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -ay - x^3 - a^2 x. \end{cases}$	а) $a > 0$; б) $a = 0$; в) $a < 0$.	10-15
14.		Исследовать на устойчивость решение системы $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - 9y, & x(0) = 0, \\ \frac{dy}{dt} = x - y, & y(0) = 0. \end{cases}$	Устойчиво.	10-15
15.		Выяснить, при каких значениях параметра a нулевое решение является А) асимптотически устойчивым; Б) устойчивым, но не асимптотически; В) неустойчивым $\begin{cases} \dot{x} = ax + y + (a+1)x^2, \\ \dot{y} = x + ay. \end{cases}$	а) $a < -1$; б) $a = -1$; в) $a > -1$.	10-15
16.	Задание открытого типа	1035. Вывести уравнение движения маятника без сопротивления. Для случая, когда все постоянные, входящие в уравнение, равны 1, начертить траектории на фазовой плоскости. Дать физическое истолкование траекториям различных типов.	$l\ddot{\varphi} + g \sin \varphi = 0.$	20-25

№ п/п	Тип задания	Формулировка задания	Правильный ответ	Время выполнения (в минутах)
17.		1036. Вывести уравнение движения маятника с сопротивлением, пропорциональным квадрату скорости. Дать чертеж траекторий на фазовой плоскости.	$ml\ddot{\varphi} + kl^2\dot{\varphi} \dot{\varphi} + mg$	20-25
18.		 889. Траектории системы уравнений $\frac{dx}{dt} = P(x, y)$, $\frac{dy}{dt} = Q(x, y)$, где функции $P, P'_x, P'_y, Q, Q'_x, Q'_y$ непрерывны, изображены на фазовой плоскости (рис. 5). Что можно сказать о поведении решений при $t \rightarrow +\infty$? Является ли нулевое решение асимптотически устойчивым? Является ли оно устойчивым по Ляпунову? Рис. 5	Все решения стремятся к нулю. Нет, нет.	15-25
19.		894. Доказать, что если какое-нибудь одно решение линейной системы дифференциальных уравнений устойчиво по Ляпунову, то устойчивы все решения этой системы.		20-30
20.		895. Доказать, что если каждое решение линейной однородной системы остается ограниченным при $t \rightarrow +\infty$, то нулевое решение устойчиво по Ляпунову.		20-30
21.		896. Доказать, что если каждое решение линейной однородной системы стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$, то нулевое решение асимптотически устойчиво.		20-30
22.		161. При каких соотношениях между коэффициентами a, b, c, d особая точка системы $\dot{x} = ax + by, \dot{y} = cx + dy$ является а) седлом, б) узлом?	а) $ad < bc$; б) $ad > bc$, $(a - d)^2 + 4bc > 0$.	20-30
23.		162. При каких a, b, c, d для каждого решения системы $\dot{x} = ax + by, \dot{y} = cx + dy$ полярный угол точки $(x(t), y(t))$ возрастает при увеличении t ?	$c > 0, (a - d)^2 + 4bc < 0$.	20-30

Полный комплект оценочных материалов по дисциплине (фонд оценочных средств) хранится в электронном виде на кафедре, утверждающей рабочую программу дисциплины, и в Центре мониторинга и аудита качества обучения.

7.4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине

Таблица 10
Технологическая карта рейтинговых баллов по дисциплине

№ п/п	Контролируемые мероприятия	Количество Мероприятий / баллы	Максимальное количество баллов	Срок представления
6 семестр				
Основной блок				
1.	Написание контрольных работ	2/5	10	
2.	Выполнение домашней работы	2/5	10	
3.	Коллоквиум	2/10	20	
Всего			40	-
Блок бонусов				
4.	Посещение занятий		10	
Всего			10	
Дополнительный блок				
5.	Экзамен		50	
Всего			50	-
ИТОГО			100	-
7 семестр				
Основной блок				
6.	Выполнение лабораторных работ	8/12	96	

№ п/п	Контролируемые мероприятия	Количество Мероприятий / баллы	Максимальное количество баллов	Срок представления
Всего			96	-
Блок бонусов				
7.	Посещение занятий		4	
Всего			4	-
ИТОГО			100	-

Таблица 11

Шкала перевода рейтинговых баллов в итоговую оценку за семестр по дисциплине

Сумма баллов	Оценка по 4-балльной шкале
90–100	5 (отлично)
85–89	4 (хорошо)
75–84	
70–74	
65–69	
60–64	3 (удовлетворительно)
Ниже 60	2 (неудовлетворительно)

При реализации дисциплины в зависимости от уровня подготовленности обучающихся могут быть использованы иные формы, методы контроля и оценочные средства, исходя из конкретной ситуации.

8. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

8.1. Основная литература:

1. Виртуальная лаборатория. Сайт лаборатории «Математическое моделирование и информационные технологии в науке и образовании». <http://mathmod.asu.edu.ru/javafx/>
2. Коломина М.В. Дифференциальные уравнения: курс лекций для студентов, обучающихся по специальности 010200 - Прикладная математика и информатика. – Астрахань: Астраханский ун-т, 2007. - 172 с. (44 экз.).
3. Коломина М.В., Пугина Н.Н. Электронный учебник «Курс лекций по обыкновенным дифференциальным уравнениям» Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ №2006613452 от 03.10.2006 г
4. Коломина М.В., Скупова Н.В. Электронный учебник «Лекции по качественной теории дифференциальных уравнений» Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ № 2007613980 от 18.09.2007 г.
5. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Практический курс [Электронный ресурс]: учеб. пособие с мультимедиа сопровождением / А.В. Пантелеев, А.С. Якимова, К.А. Рыбаков - М.: Логос, 2017. URL: <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785987044650.html> (ЭБС «Консультант студента»)
6. Тарасевич Ю.Ю. Математическое и компьютерное моделирование: Вводный курс: учеб. пособ. для студентов естественно-математических спец. - М.: Эдиториал УРСС, 2001. - 144 с. (1 экз.)
7. Туганбаев А.А. Дифференциальные уравнения [Электронный ресурс]/ Туганбаев А.А. - М.: ФЛИНТА, 2017. URL: <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785976513099.html> (ЭБС «Консультант студента»)
8. Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям / Филиппов А. Ф. - М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. - 176 с. - ISBN 5-93972-008-0: 101-64. 28.

8.2. Дополнительная литература:

1. Амелькин В.В. Математические модели и дифференциальные уравнения. - Минск: Вышэйш. шк., 1982. - 271 с. (7 экз.)
2. Информационная система. Динамические модели в биологии. Реестр моделей [Электронный ресурс]: / Руководитель проекта Ризниченко Г. Ю. URL:

<http://www.dmb.biophys.msu.ru/registry?article=32>.

3. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: УРСС, 2002, 256 с.

4. Половинкина Ю.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения: моделирование задач естествознания и экономики [Электронный ресурс] / Ю.С. Половинкина - Архангельск: ИД САФУ, 2014. URL: <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785261009962.html> (ЭБС «Консультант студента»)

5. Самарский А.А., Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры [Электронный ресурс] / Самарский А.А., Михайлов А.П. - 2-е изд., испр. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 320 с. - URL: <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN592210120.html> (ЭБС «Консультант студента»)

8.3. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимый для освоения дисциплины

1. Электронно-библиотечная система (ЭБС) ООО «Политехресурс» «Консультант студента»: www.studentlibrary.ru.

9. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Мультимедийная аудитория с большой доской.

Рабочая программа дисциплины при необходимости может быть адаптирована для обучения (в том числе с применением дистанционных образовательных технологий) лиц с ограниченными возможностями здоровья, инвалидов. Для этого требуется заявление обучающихся, являющихся лицами с ограниченными возможностями здоровья, инвалидами, или их законных представителей и рекомендации психолого-медико-педагогической комиссии. Для инвалидов содержание рабочей программы дисциплины может определяться также в соответствии с индивидуальной программой реабилитации инвалида (при наличии).