МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Астраханский государственный университет имени В. Н. Татищева»
(Астраханский государственный университет им. В. Н. Татищева)

СОГЛАСОВАНО	УТВЕРЖДАЮ
Руководитель ОПОП	Заведующий кафедрой ФМО
Байгушева И.А.	Байгушева И.А.
«_29__» ___08______ 2023_ г.	от «__29__» ____08__________ 2023_ г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ
УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Составитель(-и)	**Стрельцова И.С. к.ф.-м.н., доцент каф. ФМО;**
Направление подготовки	**44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями)**
Направленность (профиль) ОПОП	**Математика и Информатика**
Квалификация (степень)	**бакалавр**
Форма обучения	**очная**
Год приема (курс)	**2020**
Семестр(ы)	**8-9**

Астрахань, 2023 г.

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

1.1. Цель освоения дисциплины (модуля) «Уравнения математической физики»: ознакомление с основными понятиями математической физики, освоение методов и способов решения уравнений в частных производных второго порядка.
1.2. Задача освоения дисциплины «Уравнения математической физики»: изучение основ математической физики, необходимых для освоения других прикладных дисциплин, и развитию практических навыков решения соответствующих задач.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП ВО

2.1. Учебная дисциплина «Уравнения математической физики» относится к части, формируемой участниками образовательных отношений, и осваивается в 8-9 семестрах.
2.2. Для изучения данной учебной дисциплины (модуля) необходимы знания, умения и навыки, формируемые дисциплинами «Математический анализ» и «Дифференциальные уравнения», изучаемыми в университете.
Знания: основных понятий математического анализа и дифференциальных уравнений, правил и формул дифференцирования и интегрирования.
Умения: применять формулы дифференцирования и интегрирования, решать дифференциальные уравнения, строить математические модели.
Навыки: применять универсальные учебные действия при решении математических задач.
2.3. Перечень последующих учебных дисциплин, для которых необходимы знания, умения и навыки, формируемые данной учебной дисциплиной: «Функциональный анализ» и др.

3. ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование элементов следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО и ОПОП ВО по данному направлению подготовки (специальности):

универсальных: УК-1. Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач;
профессиональных: ПК-1. Способен осваивать и использовать базовые научно-теоретические знания и практические умения по предмету в профессиональной деятельности.

Таблица 1. Декомпозиция результатов обучения

Код компетенции	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю)		
	Знать	Уметь	Владеть
УК-1. Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1. Знать методы критического анализа и оценки современных научных достижений; основные принципы критического анализа	УК-1.2. Уметь получать новые знания на основе анализа, синтеза и других методов; собирать данные по сложным научным проблемам, относящимся к профессиональной области; осуществлять поиск информации и решений на основе	УК-1.3. Владеть навыком исследования проблем профессиональной деятельности с применением анализа, синтеза и других методов интеллектуальной деятельности; выявлением научных проблем и использованием адекватных методов

		экспериментальных действий	для их решения; демонстрированием оценочных суждений в решении проблемных профессиональных ситуаций
ПК-1. Способен осваивать и использовать базовые научно-теоретические знания и практические умения по предмету в профессиональной деятельности	ПК-1.1. Знать содержание и закономерности уравнений математической физики; содержание учебников по уравнениям математической физики	ПК-1.2. Уметь анализировать базовые научно-теоретические представления в области уравнений математической физики	ПК-1.3. Владеть навыками понимания и анализа научно-теоретических представлений теории уравнений математической физики для решения задач профессионального характера

4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Объём дисциплины (модуля) составляет 2,2 зачётные единицы, в том числе 92 часа, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (из них 34 часа – лекции, 58 часов – практические, семинарские занятия), и 52 часа – на самостоятельную работу обучающихся.

Таблица 2. Структура и содержание дисциплины (модуля)

№ п/п	Раздел, тема дисциплины (модуля)	Семестр	Неделя семестра	Контактная работа (в часах)			Самостоят. работа		Форма текущего контроля успеваемости, форма промежуточной аттестации *(по семестрам)*
				Л	ПЗ	ЛР	КР	СР	
1	Тема 1. Общие вопросы теории уравнений в частных производных.	8	1-7	7	14			10	К/р 1, зачет
2	Тема 2. Дифференциальные уравнения гиперболического типа	8	8-14	7	14			14	К/р 2, зачет
	ИТОГО ЗА 8 СЕМЕСТР			14	28			24	
3	Тема 3. Дифференциальные уравнения эллиптического типа	9	1-5	10	15			14	К/р 3, экзамен
4	Тема 4.	9	6-	10	15			14	К/р 4, экзамен

	Дифференциальные уравнения параболического типа		10						
	ИТОГО ЗА 9 СЕМЕСТР			20	30			28	
ИТОГО				**34**	**58**			**52**	**ЭКЗАМЕН / ЗАЧЕТ / ЗАЧЕТ С ОЦЕНКОЙ**

Примечание: Л – лекция; ПЗ – практическое занятие, семинар; ЛР – лабораторная работа; КР – курсовая работа; СР – самостоятельная работа.

СОДЕРЖАНИЕ РАЗДЕЛОВ (ТЕМ)

Тема 1. Введение

Основные понятия (включая формулировку задачи Коши). Вывод основных уравнений математической физики. Теорема Ковалевской. Общая постановка задачи Коши. Сведение обобщенной задачи Коши к основной. Характеристическое уравнение и характеристика. Классификация линейных уравнений. Определение типов уравнений второго порядка. Приведение гиперболических, параболических и эллиптических уравнений с неизвестной функцией двух переменных к каноническому виду. Метод характеристик.

Тема 2. Дифференциальные уравнения гиперболического типа

Задача Коши для волнового уравнения. Теорема о единственности решения. Метод Даламбера решения задачи Коши для уравнения колебаний бесконечной струны. Единственность решения смешанной задачи для волнового уравнения. Непрерывная зависимость решения от начальных условий. Метод Фурье решения смешанной задачи.

Тема 3. Дифференциальные уравнения эллиптического типа

Теорема о максимуме и минимуме для гармонической функции. Единственность решения граничной задачи для уравнения Лапласа. Непрерывная зависимость решения от граничных условий. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа методом Фурье. Формула Пуассона для решения задачи Дирихле.

Тема 4. Дифференциальные уравнения параболического типа

Теорема о максимуме и минимуме для решения смешанной задачи для уравнения теплопроводности. Единственность решения смешанной задачи для уравнения теплопроводности. Непрерывная зависимость решения смешанной задачи от начальных и граничных условий. Метод Фурье решения смешанной задачи для уравнения теплопроводности.

Таблица 3. Матрица соотнесения тем/разделов учебной дисциплины/модуля и формируемых в них компетенций

Темы, разделы дисциплины	Кол-во часов	Код компетенции		общее количество компетенций
		УК-1	ПК-1	
Тема 1. Общие вопросы теории уравнений в частных	31	+	+	2

производных				
Тема 2. Дифференциальные уравнения гиперболического типа	35	+	+	2
Тема 3. Дифференциальные уравнения эллиптического типа	39	+	+	2
Тема 4. Дифференциальные уравнения параболического типа	39	+	+	2
ИТОГО:	**144**			

5. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРЕПОДАВАНИЮ И ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

5.1. Указания для преподавателей по организации и проведению учебных занятий по дисциплине (модулю).

Методические указания по проведению лекционных занятий

Лекция по математическим дисциплинам – один из методов обучения, одна из основных системообразующих форм организации учебного процесса в вузе. Лекционное занятие представляет собой систематическое, последовательное, монологическое изложение преподавателем-лектором учебного материала теоретического и практического характера. Такое занятие представляет собой элемент технологии представления учебного материала путем логически стройного, систематически последовательного и ясного изложения.

Цель лекции – организация целенаправленной познавательной деятельности студентов по овладению программным материалом учебной дисциплины. Чтение курса лекций позволяет дать связанное, последовательное изложение материала в соответствии с новейшими данными науки, сообщить слушателям основное содержание предмета в целостном, систематизированном виде. В ряде случаев лекция выполняет функцию основного источника информации.

Задачи лекции заключаются в обеспечении формирования системы знаний по учебной дисциплине, в умении аргументировано излагать научный материал, в формировании профессионального кругозора и общей культуры, в оптимизации других форм организации учебного процесса.

Организационно-методической базой проведения лекционных занятий является рабочий учебный план направления или специальности. При подготовке лекционного материала преподаватель обязан руководствоваться учебными программами по дисциплинам кафедры, тематика и содержание лекционных занятий которых представлена в учебно-методических комплексах. Характеристика отдельных тем дисциплины, которые выносятся на самостоятельную работу, недостаточно раскрываются в учебниках и учебных пособиях либо представляют трудности для освоения студентами (требуются дополнительные комментарии, советы, указания по их изучению).

При чтении лекций преподаватель имеет право самостоятельно выбирать формы и методы изложения материала, которые будут способствовать качественному его усвоению.

При этом преподаватель в установленном порядке может использовать технические средства обучения, имеющиеся на кафедре и в университете.

Лекция как элемент образовательного процесса должна включать следующие этапы: формулировку темы лекции, указание основных изучаемых разделов или вопросов и предполагаемых затрат времени на их изложение, изложение вводной части, изложение основной части лекции, краткие выводы по каждому из вопросов, заключение, рекомендации литературных источников по излагаемым вопросам.

Методические указания по проведению практических занятий

Целью практических занятий является формирование у студентов умений и навыков применять материал лекции при решении математических задач, повышение знаний студентов, совершенствование навыков изложения своих мыслей устно и письменно, навыков работы с математической литературой, умения осуществлять поиск решения задачи и анализировать полученные результаты.

Практические занятия проводятся с использованием традиционных и интерактивных форм обучения, таких как парная и командная работа, групповые обсуждения, тематические дискуссии.

Правильно организованные практические занятия ориентированы на решение следующих задач:

− обобщение, систематизация, углубление, закрепление полученных на лекциях и в процессе самостоятельной работы теоретических знаний по дисциплине «Уравнения математической физики»;

− формирование практических умений и навыков решения математических задач, соответствующих компетенций;

− выработка при решении поставленных задач таких профессионально значимых качеств, как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива.

Состав и содержание практических занятий направлены на реализацию требований Государственных образовательных стандартов. Перечень тем практических занятий по дисциплине «Уравнения математической физики» определяется рабочей учебной программой дисциплины. План практических занятий должен отвечать общим идеям и направленности лекционного курса, и соотнесен с ним в последовательности тем.

Структура практического занятия должна состоять из следующих компонентов: вступление педагога; ответы на вопросы студентов по неясному предшествующему учебному материалу; практическая часть как плановая; заключительное слово педагога.

Задания для практических занятий могут быть разных видов:

1) задания на иллюстрацию теоретического материала, имеющие воспроизводящий характер. Они выявляют качество понимания студентами теории;

2) типовые задачи, образцы решения которых были показаны преподавателем на лекции. Для самостоятельного выполнения таких заданий требуется, чтобы студент овладел показанными методами решения;

3) задания, содержащие элементы творчества. Одни из них требуют от студента преобразований, реконструкций, обобщений. Для их выполнения необходимо привлекать ранее приобретенный опыт, устанавливать внутрипредметные и межпредметные связи. Выполнение других требует дополнительных знаний, которые студент должен приобрести самостоятельно. Третьи предполагают наличие у студента некоторых исследовательских умений;

4) индивидуальные задания, на различный срок, определяемый преподавателем, с последующим представлением их для проверки и отчетом в указанный срок.

На практических занятиях студенты овладевают основными методами и приемами самостоятельного решения задач. Если студент не может самостоятельно разобраться в решении той или иной задачи преподавателю рекомендуется дать консультацию, пояснить еще раз метод решения и далее стимулировать работу студента путем системы наводящих вопросов при решении аналогичных задач.

Практические занятия должны так быть организованы, чтобы студенты ощущали нарастание сложности выполнения заданий, испытывали бы положительные эмоции от переживания собственного успеха в учении.

В заключительной части преподаватель должен подвести итоги занятия, отметив положительные и отрицательные стороны, выдать домашнее задание и ориентировать студентов на следующее практическое занятие.

При подготовке к практическим занятиям рекомендуется использовать учебно-методическое обеспечение, указанное в пункте 8.

5.2. Указания для обучающихся по освоению дисциплины (модулю)

Приступая к изучению учебной дисциплины «Уравнения математической физики», студенту необходимо ознакомиться с учебной программой, учебной, научной и методической литературой, имеющейся в библиотеке учебного заведения, встретиться с профессорско-преподавательским составом, получить в библиотеке рекомендованные учебники, учебно-методические пособия с методическим материалом, завести новую тетрадь для конспектирования лекций и выполнения практических заданий.

В ходе лекционных занятий студентам рекомендуется вести конспектирование учебного материала. Желательно оставить в рабочих конспектах поля, на которых можно делать пометки из рекомендованной литературы, дополняющие материал прослушанной лекции, а также подчеркивающие особую важность тех или иных теоретических положений. Задавать преподавателю уточняющие вопросы с целью уяснения теоретических положений. В ходе подготовки к лабораторно-практическим занятиям изучить основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой, новыми публикациями в периодических изданиях. При этом учесть рекомендации преподавателя и требования учебной программы. Дорабатывать свой конспект лекции, делая в нем соответствующие записи из литературы, рекомендованной преподавателем и предусмотренной учебной программой.

При подготовке к практическим занятиям лекционный материал каждого раздела должен прочитываться студентами многократно. Необходимо запомнить основные понятия, теоремы лекции и изучить методы решения типовых задач, это должно стать основным ориентиром во всех последующих видах работы с лекциями и учебным материалом.

При подготовке к контрольной работе и коллоквиуму студентам следует повторять пройденный материал в строгом соответствии с учебной программой, примерным перечнем учебных вопросов, выносящихся на контрольную работу, коллоквиум и содержащихся в данной программе. Использовать конспект лекций и литературу, рекомендованную преподавателем. Обратить особое внимание на темы учебных занятий, пропущенных студентом по разным причинам. При необходимости обратиться за консультацией и методической помощью к преподавателю.

Помимо лекций и практических занятий по дисциплине «Уравнения математической физики» учебным планом предусмотрена и самостоятельная работа студента по изучению данной дисциплины.

Самостоятельная работа – это планируемая работа студентов, выполняемая по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия. Самостоятельная работа выполняет ряд функций, среди которых необходимо отметить следующие:

− развивающая (повышение культуры умственного труда, приобщение к творческим видам деятельности, обогащение интеллектуальных способностей студентов);

− ориентирующая и стимулирующая (процессу обучения придается ускорение и мотивация);

− воспитательная (формируются и развиваются профессиональные качества специалиста);

− исследовательская (новый уровень профессионально-творческого мышления);

− информационно-обучающая (учебная деятельность студентов на аудиторных занятиях).

Задачами самостоятельной работы студентов являются:

− систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;

− углубление и расширение теоретических знаний;

− формирование умения использовать справочную литературу;

− развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;

−формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;

− развитие исследовательских умений.

В учебном процессе высшего учебного заведения выделяют два вида самостоятельной работы: аудиторная и внеаудиторная.

Аудиторная самостоятельная работа по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданиям.

Внеаудиторная самостоятельная работа выполняется студентом по заданию преподавателя, но без его непосредственного участия.

Внеаудиторная самостоятельная работа может включать такие формы работы, как: индивидуальные занятия (домашние занятия); изучение программного материала дисциплины (работа с учебником и конспектом лекции); изучение рекомендуемых литературных источников; конспектирование источников; выполнение контрольных работ; работа со словарями и справочниками; работа с электронными образовательными ресурсами и ресурсами Internet; ответы на контрольные вопросы; работа с компьютерными программами (математическими пакетами); подготовка к экзамену; групповая самостоятельная работа студентов; получение консультаций для разъяснений по вопросам изучаемой дисциплины.

Содержание самостоятельной работы студентов по изучению дисциплины «Уравнения математической физики» представлено в таблице 4.

Таблица 4. Содержание самостоятельной работы обучающихся

Номер радела (темы)	Темы/вопросы, выносимые на самостоятельное изучение	Кол-во часов	Формы работы
Тема 1. Общие вопросы теории уравнений в частных производных		10	Самостоятельная внеаудиторная работа: изучение соответствующих разделов рекомендуемых источников; решение практических задач
Тема 2. Дифференциальные уравнения гиперболического типа		14	
Тема 3. Дифференциальные уравнения эллиптического типа		14	
Тема 4. Дифференциальные уравнения параболического типа		14	

5.3. Виды и формы письменных работ, предусмотренных при освоении дисциплины, выполняемые обучающимися самостоятельно.

В процессе изучения дисциплины «Уравнения математической физики» предусмотрены следующие виды и формы письменных работ для самостоятельного выполнения:

1) аудиторная контрольная работа;
2) домашнее задание, как теоретического, так и практического характера;

3) экзаменационная работа.
Контрольные работы и экзаменационная работа выполняется студентом в аудитории.

6. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

6.1. Образовательные технологии

В соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки бакалавров в рамках изучения дисциплины «Уравнения математической физики» предусмотрено использование в учебном процессе следующих активных и интерактивных форм проведения занятий:

Таблица 5 – Образовательные технологии, используемые при реализации учебных занятий

Раздел, тема дисциплины (модуля)	Форма учебного занятия		
	Лекция	Практическое занятие, семинар	Лабораторная работа
Тема 1. Общие вопросы теории уравнений в частных производных	Активная лекция	Фронтальный опрос	Не предусмотрено
Тема 2. Дифференциальные уравнения гиперболического типа	Активная лекция	Командная работа	Не предусмотрено
Тема 3. Дифференциальные уравнения эллиптического типа	Лекция-презентация	Командная работа	Не предусмотрено
Тема 4. Дифференциальные уравнения параболического типа	Активная лекция	Выполнение командных заданий	Не предусмотрено

6.2. Информационные технологии

В процессе изучения дисциплины «Уравнения математической физики» рекомендуется использовать при выполнении учебной и внеучебной работы следующие информационные технологии:

- использование электронных учебников и различных сайтов (например, электронные библиотеки, журналы и т.д.) как источник информации;

- использование возможностей электронной почты преподавателя для получения консультаций и обмена учебной информацией;

- использование средств представления учебной информации (лекции с использованием презентаций);

- использование математических пакетов и офисных программ.6.3. Перечень программного обеспечения и информационных справочных систем

6.3. Перечень программного обеспечения и информационных справочных систем

Перечень лицензионного учебного программного обеспечения

Наименование программного обеспечения	Назначение

Adobe Reader	Программа для просмотра электронных документов
LMS Moodle «Электронное образование»	Виртуальная обучающая среда
Microsoft Windows 7 Professional	Операционная система
Microsoft Office 2013	Пакет офисных программ
7-zip	Архиватор
Google Chrome	Браузер
Kaspersky Endpoint Security	Средство антивирусной защиты
Maple 18	Система компьютерной алгебры

Современные профессиональные базы данных, информационные справочные системы

1. Электронный каталог Научной библиотеки АГУ на базе MARK SQL НПО «Информ-систем»: https://library.asu.edu.ru
2. Электронный каталог «Научные журналы АГУ»: http://journal.asu.edu.ru/

7. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

7.1. Паспорт фонда оценочных средств.

При проведении текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю) «Уравнения математической физики» проверяется сформированность у обучающихся компетенций, указанных в разделе 3 настоящей программы. Этапность формирования данных компетенций в процессе освоения образовательной программы определяется последовательным освоением дисциплин (модулей) и прохождением практик, а в процессе освоения дисциплины (модуля) – последовательным достижением результатов освоения содержательно связанных между собой разделов, тем.

Таблица 6. Соответствие изучаемых разделов, результатов обучения и оценочных средств

№ п/п	Контролируемый раздел, тема дисциплины (модуля)	Код контролируемой компетенции (компетенций)	Наименование оценочного средства
1	Тема 1. Общие вопросы теории уравнений в частных производных	УК – 1, ПК – 1	К/р 1, зачет
2	Тема 2. Дифференциальные уравнения гиперболического типа	УК – 1, ПК – 1	К/р 2, зачет
3	Тема 3. Дифференциальные уравнения эллиптического типа	УК – 1, ПК – 1	К/р 3, экзамен
4	Тема 4. Дифференциальные уравнения параболического типа	УК – 1, ПК – 1	К/р 4, экзамен

7.2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций, описание шкал оценивания

Таблица 7

Показатели оценивания результатов обучения в виде знаний

Шкала оценивания	Критерии оценивания
5 «отлично»	демонстрирует глубокое знание теоретического материала, умение обоснованно излагать свои мысли по обсуждаемым вопросам, способность полно, правильно и аргументированно отвечать на вопросы, приводить примеры
4 «хорошо»	демонстрирует знание теоретического материала, его последовательное изложение, способность приводить примеры, допускает единичные ошибки, исправляемые после замечания преподавателя
3 «удовлетвори тельно»	демонстрирует неполное, фрагментарное знание теоретического материала, требующее наводящих вопросов преподавателя, допускает существенные ошибки в его изложении, затрудняется в приведении примеров и формулировке выводов
2 «неудовлетво рительно»	демонстрирует существенные пробелы в знании теоретического материала, неспособен его изложить и ответить на наводящие вопросы преподавателя, не может привести примеры

Таблица 8

Показатели оценивания результатов обучения в виде умений и владений

Шкала оценивания	Критерии оценивания
5 «отлично»	демонстрирует способность применять знание теоретического материала при выполнении заданий, последовательно и правильно выполняет задания, умеет обоснованно излагать свои мысли и делать необходимые выводы
4 «хорошо»	демонстрирует способность применять знание теоретического материала при выполнении заданий, последовательно и правильно выполняет задания, умеет обоснованно излагать свои мысли и делать необходимые выводы, допускает единичные ошибки, исправляемые после замечания преподавателя
3 «удовлетвори тельно»	демонстрирует отдельные, несистематизированные навыки, не способен применить знание теоретического материала при выполнении заданий, испытывает затруднения и допускает ошибки при выполнении заданий, выполняет задание при подсказке преподавателя, затрудняется в формулировке выводов
2 «неудовлетво рительно»	неспособен правильно выполнить задание

7.3. Контрольные задания и иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения по дисциплине (модулю)

Инструкция по выполнению контрольных работ.

Контрольные работы выполняются в аудитории. Внимательно прочитайте задания. При выполнении заданий нельзя пользоваться телефоном, интернетом, можно использовать

конспекты лекций, рабочую тетрадь, справочную литературу. Задания выполняются на отдельном листе, на котором необходимо записать Ф.И.О. студента, группу, номер варианта, в каждом задании записывается номер задания, условие задания, подробное решение, ответ. Время выполнения контрольной работы – 90 минут.
Нулевые варианты контрольных работ:

Контрольная работа 1
«Общие вопросы теории уравнений в частных производных»
Вариант 0

1. Решить уравнения:

a) $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = x^2 - y + 3,\ u = u(x, y)$

b) $2x - 5y + z + 2\frac{\partial u}{\partial y} - 3\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 0, u = u(x, y, z)$.

2. Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = 4$$

и проходящую через параболу $y^2 = z, x = 0$.

3. Найти области гиперболичности, параболичности и эллиптичности уравнения

$$2x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4y\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - xy\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 5x - 3u = 0.$$

4. Привести уравнение к каноническому виду, используя метод характеристик

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y},\ u = u(x, y).$$

Контрольная работа 2
«Дифференциальные уравнения гиперболического типа»
Вариант 0

1. Найти решение уравнения колебаний бесконечной струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

удовлетворяющее следующему начальному условию:

$$\begin{cases} u(0, x) = cosx \\ u_t'(0, x) = \dfrac{1}{x^2 + 1} \end{cases}$$

2. Построить профиль бесконечной струны для моментов времени $t_0 = 0, t_1 = \frac{1}{2a}$, если

$$u(0, x) = \varphi_0(x) = \begin{cases} (-x^2 + 1) \cdot 0{,}1, & x \in [-1{,}1] \\ 0, & x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \end{cases},$$

$u_t'(0, x) = \varphi_1(x) = 0$.

3. Пусть начальные отклонения струны, закрепленной в точках $x = 0$ и $x = l$, равны нулю, а начальная скорость выражается формулой

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \begin{cases} v_0(const) \text{ при } \left|x - {}^{l}\!/_{2}\right| < {}^{h}\!/_{2}, \\ 0 \qquad\qquad \text{при } \left|x - {}^{l}\!/_{2}\right| > {}^{h}\!/_{2}. \end{cases}$$

Определить форму струны для любого момента времени t.

Контрольная работа 3
«Дифференциальные уравнения эллиптического типа»
Вариант 0

1. Решить задачу Дирихле для круга радиуса R с центром в начале координат, если заданы следующие граничные условия:
а) $u|_{r=R} = A$,
б) $u|_{r=R} = Acos\varphi$,
в) $u|_{r=R} = Asin^2\varphi + Bcos^2\varphi$,
где A и B – постоянные, (r, φ) - полярные координаты.

2. Найти функцию $u(r, \varphi)$, удовлетворяющую уравнению Лапласа внутри круга с центром в начале координат и радиуса R, если на границе этого круга

$$u|_{r=R} = \begin{cases} Asin\varphi, & 0 \le \varphi \le \pi, \\ \frac{1}{3}Asin^3\varphi, & \pi \le \varphi \le 2\pi. \end{cases}$$

Контрольная работа 4
«Дифференциальные уравнения параболического типа»
Вариант 0

1. Найти решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $(0 < x < l), t > 0$, удовлетворяющее начальным условиям:

$$u|_{t=0} = f(x) = \begin{cases} x \text{ при } 0 < x \le {}^{l}\!/_{2}, \\ l - x \text{ при } {}^{l}\!/_{2} \le x < l \end{cases}$$

и краевым условиям $u|_{x=0} = u|_{x=l} \equiv 0$.

2. Дан тонкий однородный стержень длины l, изолированный от внешнего пространства, начальная температура которого равна $f(x) = \frac{cx(l-x)}{l^2}$. Концы стержня поддерживаются при температуре, равной нулю. Определить температуру стержня в момент времени $t > 0$.

Вопросы для подготовки к экзамену

1. Основные понятия (включая формулировку задачи Коши).
2. Теорема Ковалевской (с доказательством единственности).
3. Общая постановка задачи Коши.
4. Сведение обобщенной задачи Коши к основной. Характеристическое уравнение и характеристика.
5. Классификация линейных уравнений. Определение типов уравнений второго порядка.
6. Приведение гиперболических уравнений с неизвестной функцией двух переменных к каноническому виду. Метод характеристик.
7. Приведение эллиптических уравнений с неизвестной функцией двух переменных к каноническому виду. Метод характеристик.

8. Приведение параболических уравнений с неизвестной функцией двух переменных к каноническому виду. Метод характеристик.
9. Задача Коши для волнового уравнения. Теорема о единственности решения.
10. Метод Даламбера решения задачи Коши для уравнения колебаний бесконечной струны (с выводом формулы Даламбера).
11. Единственность решения смешанной задачи для волнового уравнения.
12. Непрерывная зависимость решения от начальных условий.
13. Метод Фурье решения смешанной задачи.
14. Теорема о максимуме и минимуме для гармонической функции.
15. Единственность решения граничной задачи для уравнения Лапласа.
16. Непрерывная зависимость решения от граничных условий.
17. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа методом Фурье.
18. Формула Пуассона для решения задачи Дирихле.
19. Теорема о максимуме и минимуме для решения смешанной задачи для уравнения теплопроводности.
20. Единственность решения смешанной задачи для уравнения теплопроводности.
21. Непрерывная зависимость решения смешанной задачи от начальных и граничных условий.
22. Метод Фурье решения смешанной задачи для уравнения теплопроводности.

Таблица 9 – Примеры оценочных средств с ключами правильных ответов

Примеры оценочных средств по каждому типу заданий:

№ п/п	*Тип задания*	*Формулировка задания*	*Правильный ответ*	*Время выполнения (в минутах)*
Код и наименование проверяемой компетенции УК-1. Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач				
1.	*Задание закрытого типа*	*Укажите соответствие вида дифференциального уравнения его названию:* *1)* $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; *2)* $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; *3)* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. *а) уравнение колебаний струны;* *б) уравнение Лапласа;* *в) уравнение теплопроводности.*	*1-а* *2-в* *3-б*	*2*
2.		*Линейное уравнение второго порядка с частными производными с дискриминантом* $B^2 - AC$ *в некоторой области* Ω *имеет*	*1*	*2*

№ п/п	*Тип задания*	*Формулировка задания*	*Правильный ответ*	*Время выполнения (в минутах)*
		гиперболический тип, если в каждой точке этой области… *1)* $B^2 - AC > 0$; *2)* $B^2 - AC = 0$; *3)* $B^2 - AC < 0$.		
3.		*Формула Даламбера решения задачи Коши для уравнения колебаний бесконечной струны имеет вид:* *1)* $u(t,x) = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi_1(z)dz$; *2)* $u(t,x) = \frac{\varphi_0(x+at)+\varphi_0(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi_1(z)dz$; *3)* $u(t,x) = \frac{\varphi_0(x+at)+\varphi_0(x-at)}{2}$.	*2*	*3*
4.		*Уравнение эллиптического типа приводится к каноническому виду…* *1)* $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = \overline{H}\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)$; *2)* $\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} = \overline{H}\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)$; *3)* $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} = \overline{H}\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)$.	*3*	*3*
5.		*Закончите формулировку задачи Дирихле для круга: Пусть дан круг радиуса* R *с центром в полюсе полярной системы координат. Найти функцию* u(r,*φ), …* *1)гармоническую в круге и удовлетворяющую на его окружности*	*1*	*3*

№ п/п	Тип задания	Формулировка задания	Правильный ответ	Время выполнения (в минутах)
		условию $u\|_{r=R} = f(\varphi)$, *где* $f(\varphi)$ *- заданная функция, непрерывная на окружности;* *2) гармоническую в круге;* *3) гармоническую в круге и удовлетворяющую на его окружности условию* $u\|_{r=R} = 1$, *где* $f(\varphi)$ *- заданная функция, непрерывная на окружности.*		
6.	*Задание открытого типа*	*Преобразовать уравнение Лапласа* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ *к полярным координатам* (r, φ)	*Сделаем в уравнении Лапласа замену* $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$ *Получим:* $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi;$ $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2\varphi + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin^2\varphi;$ $\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{\partial u}{\partial x} r\sin\varphi + \frac{\partial u}{\partial y} r\cos\varphi;$ $\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} r^2\sin^2\varphi - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} r^2\sin\varphi\cos\varphi + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} r^2\cos^2\varphi - \frac{\partial u}{\partial x} r\cos\varphi - \frac{\partial u}{\partial y} r\sin\varphi.$ *Отсюда* $r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = r^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),$ *или* $r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0.$	*8*
7.		*Решить задачу Коши*	*Решение задачи Коши для уравнения*	*5*

№ п/п	*Тип задания*	*Формулировка задания*	*Правильный ответ*	*Время выполнения (в минутах)*
		для уравнения колебаний бесконечной струны: $\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,x) = sinx \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0 \end{cases}$	*колебаний бесконечной струны можно найти по формуле Даламбера:* $u(t,x) = \frac{\varphi_0(x+at)+\varphi_0(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\varphi_1(z)dz.$ *В нашем случае а=1,* $\varphi_0(x) = sinx, \varphi_1(x) = 0.$ *Получаем:* $u(t,x) = \frac{\sin(x+t)+\sin(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} 0dz = \frac{1}{2}(sinxcost + cosxsint + sinxcost - cosxsint = sinxcost.$ *Итак,* $u(t,x) = sinxcost.$	
8.		*Привести уравнение* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}$ *к каноническому виду в области гиперболичности*	*Имеем:* $A = 1,\ B = 0,\ C = -y,\ B^2 - AC = y.$ *Наше уравнение имеет гиперболический тип в области* $\Omega_1 = \{(x,y)\mid y > 0\}.$ *Составим и решим уравнения* $\left[\begin{array}{l} A\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \left(-B - \sqrt{B^2 - AC}\right)\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \\ A\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = \left(-B + \sqrt{B^2 - AC}\right)\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = -\sqrt{y}\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = \sqrt{y}\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \end{array}\right. \Rightarrow$ $\left[\begin{array}{l} \frac{\partial \varphi_1/\partial x}{\partial \varphi_1/\partial y} = -\sqrt{y} \\ \frac{\partial \varphi_2/\partial x}{\partial \varphi_2/\partial y} = \sqrt{y} \end{array}\right.$ *Отсюда* $y' = \pm\sqrt{y} \Leftrightarrow \frac{dy}{\sqrt{y}} = \pm dx \ \Leftrightarrow$	*10*

№ п/п	Тип задания	Формулировка задания	Правильный ответ	Время выполнения (в минутах)
			$\Leftrightarrow 2\sqrt{y} = \pm x + C \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2\sqrt{y} \mp x = C$ $\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\varphi_1(x,y) = 2\sqrt{y} - x\\ \varphi_2(x,y) = 2\sqrt{y} + x\end{array}\right.$ *Сделаем замену* $\begin{cases}\xi = 2\sqrt{y} - x\\ \eta = 2\sqrt{y} + x\end{cases},$ *где* $\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} -1 & \frac{1}{\sqrt{y}} \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{y}} \end{vmatrix} = -\frac{2}{\sqrt{y}} \neq 0$ *в области* Ω_1. *Перейдем от старых независимых переменных к новым. Имеем:* $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta},$ $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}$ $= \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{1}{\sqrt{y}},$ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$ $= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$ $=$ $= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$ $= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$ $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$ $= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{1}{\sqrt{y}}\right)$ $=$	

№ п/п	*Тип задания*	*Формулировка задания*	*Правильный ответ*	*Время выполнения (в минутах)*
			$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)\frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right) =$ $= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{1}{\sqrt{y}}\right)\frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{1}{2\sqrt{y^3}} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}\frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{1}{\sqrt{y}}\right)\frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{1}{2\sqrt{y^3}}$ $= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{1}{y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{2}{y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{1}{y} - \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{1}{2\sqrt{y^3}} - \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{1}{2\sqrt{y^3}}$ *Подставим полученные для производных выражения в наше дифференциальное уравнение:* $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - y\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{1}{y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{2}{y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{1}{y} - \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{1}{2\sqrt{y^3}} - \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{1}{2\sqrt{y^3}}\right) =$ $= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{1}{\sqrt{y}}\right)$ *Отсюда получаем канонический вид исходного уравнения:* $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$	

№ п/п	Тип задания	Формулировка задания	Правильный ответ	Время выполнения (в минутах)
9.		*Найти решение уравнения* $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $(0<x<l), t>0$, *удовлетворяющее начальным условиям* $u\vert_{t=0}=f(x) = \begin{cases} x \text{ при } 0<x\le l/2, \\ l-x \text{ при } l/2\le x<l \end{cases}$ *и краевым условиям* $u\vert_{x=0}=u\vert_{x=l}\equiv 0$.	*Решение задачи Коши, удовлетворяющее указанным краевым условиям, будем искать в виде* $$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-(k\pi/l)^2 t} sin\frac{k\pi x}{l},$$ *где* $$b_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(x) sin\frac{k\pi x}{l}dx =\frac{2}{l}\int_0^{l/2} x sin\frac{k\pi x}{l}dx +\frac{2}{l}\int_{l/2}^{l}(l-x) sin\frac{k\pi x}{l}dx.$$ *Проинтегрируем по частям, полагая* $u=x, dv=sin\frac{k\pi x}{l}dx, du=dx, v=-\frac{l}{k\pi}cos\frac{k\pi x}{l}$*; получим* $$b_k=\frac{2}{l}\left(-\frac{lx}{k\pi}cos\frac{k\pi x}{l}+\frac{l^2}{k^2\pi^2}sin\frac{k\pi x}{l}\right)\Bigg\vert_0^{l/2}+\frac{2}{l}\left(-\frac{l^2}{k\pi}cos\frac{k\pi x}{l}+\frac{lx}{k\pi}cos\frac{k\pi x}{l}-\frac{l^2}{k^2\pi^2}sin\frac{k\pi x}{l}\right)\Bigg\vert_{l/2}^{l}=\frac{4l}{k^2\pi^2}sin\frac{k\pi}{2}.$$ *Следовательно, искомое решение имеет вид* $u(x,t)=\frac{4l}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}sin\frac{k\pi}{2}e^{-k^2\pi^2 t/l^2}sin\frac{k\pi x}{l}$.	10
10.		*Найти область эллиптичности уравнения*	*Имеем:* $A=2x, B=2y, C=-xy, B^2-AC=4y^2+2x^2y$. *Область эллиптичности найдем,*	6

№ п/п	Тип задания	Формулировка задания	Правильный ответ	Время выполнения (в минутах)
		$2x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+4y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-xy\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+5x-3u=0$	*решив неравенство* $B^2-AC<0$: $y^2+2x^2y<0 \Leftrightarrow 2y(2y+x^2)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} y>0\\ 2y+x^2<0\end{cases}\\ \begin{cases} y<0\\ 2y+x^2>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} y>0\\ y<-\frac{x^2}{2}\end{cases}\\ \begin{cases} y<0\\ y>-\frac{x^2}{2}\end{cases}\end{array}\right.$ *Поэтому область эллиптичности* Ω *имеет вид* $\Omega=\left\{(x,y)\middle\vert\left((y>0)\wedge\left(y<-\frac{x^2}{2}\right)\right)\vee\left((y<0)\wedge\left(y>-\frac{x^2}{2}\right)\right)\right\}$	
Код и наименование проверяемой компетенции ПК-1. Способен осваивать и использовать базовые научно-теоретические знания и практические умения по предмету в профессиональной деятельности				
11.	*Задание закрытого типа*	*Выберите верное утверждение:* *1. Одно и то же уравнение в разных точках может оказаться уравнением различного типа;* *2. Для отыскания области параболичности уравнения необходимо решить неравенство* $B^2-AC<0$; *3. Для отыскания области гиперболичности уравнения необходимо*	*1*	*2*

№ п/п	Тип задания	Формулировка задания	Правильный ответ	Время выполнения (в минутах)
		решить уравнение $B^2 - AC = 0$.		
12.		*Решение уравнения колебания струны может быть представлено в виде ряда:* 1. $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n cos\frac{n\pi at}{l} + B_n sin\frac{n\pi at}{l}\right) sin\frac{n\pi x}{l}$; 2. $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n cos\frac{n\pi at}{l} + 1\right) sin\frac{n\pi x}{l}$; 3. $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} sin\frac{n\pi x}{l}$.	1	2
13.		*Уравнение Лапласа* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ *в полярных координатах* (r,φ) *имеет вид:* 1. $r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$ 2. $r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$ 3. $r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r\frac{\partial u}{\partial r} = 0$	2	2
14.		*Функцию называют гармонической в области, если в ней она непрерывна вместе со своими производными до второго порядка включительно и удовлетворяет…* *1. Уравнению колебаний струны;* *2. Телеграфному уравнению;* *3. Уравнению Лапласа.*	3	2
15.		*Задача Коши для уравнения*	1	3

№ п/п	Тип задания	Формулировка задания	Правильный ответ	Время выполнения (в минутах)
		теплопроводности в случае стержня, ограниченного с обоих концов x=0 и x=l, состоит в том, чтобы найти решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ *удовлетворяющего…* *1.начальному условию* $u(x,t)\vert_{t=0}=f(x)$ *и двум краевым условиям, например* $u\vert_{x=0}=u\vert_{x=l}=0$ *или* $\frac{\partial u}{\partial x}\Big\vert_{x=0}=\frac{\partial u}{\partial x}\Big\vert_{x=l}=0$; *2. начальному условию* $u(x,t)\vert_{t=0}=f(x)$; *3. начальному условию* $u(x,t)\vert_{t=0}=1$.		
16.	*Задание открытого типа*	*Привести уравнение* $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}$$ *к каноническому виду в области эллиптичности*	*Имеем:* $A=1,\ B=0,\ C=-y,\ B^2-AC=y$. *Область эллиптичности нашего уравнения имеет вид* $$\Omega_3=\{(x,y)\vert y<0\}$$ *Составим и решим уравнения* $$A\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}=\left(-B-i\sqrt{AC-B^2}\right)\frac{\partial\varphi_1}{\partial y};$$ $$A\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}=\left(-B+i\sqrt{AC-B^2}\right)\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}.$$ $$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}=-i\sqrt{-y}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}$$ $$\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}=i\sqrt{-y}\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}$$ *Отсюда находим* $$y'=\pm i\sqrt{-y}\ \Leftrightarrow \frac{dy}{\sqrt{-y}}=\pm idx\ \Leftrightarrow$$ $$\Leftrightarrow -2\sqrt{-y}=\pm ix+C\Leftrightarrow$$ $$\Leftrightarrow -2\sqrt{-y}\mp ix=C$$ $$\Rightarrow \left[\begin{array}{c}\varphi_1(x,y)=-2\sqrt{-y}\\ \varphi_2(x,y)=x\end{array}\right.$$ *Сделаем замену* $\xi=-2\sqrt{-y},\eta=x$, *где*	10

№ п/п	Тип задания	Формулировка задания	Правильный ответ	Время выполнения (в минутах)
			$$\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt{-y}}\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-\frac{1}{\sqrt{-y}}\neq 0$$ *в области* Ω_3. *Выразим частные производные по старым переменным через частные производные по новым переменным:* $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \eta},$$ $$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{1}{\sqrt{-y}},$$ $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$ $$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{1}{\sqrt{-y}}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)\frac{1}{\sqrt{-y}}+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{-y}}\right)=$$ $$=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(-\frac{1}{y}\right)+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{1}{2\sqrt{-y^3}}$$ *Подставляя полученные выражения в исходное уравнение, находим:* $$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}-y\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(-\frac{1}{y}\right)+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{1}{2\sqrt{-y^3}}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{1}{\sqrt{-y}}$$ *Итак, мы получили канонический вид нашего уравнения:* $$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}=0$$	
17.		*Найти решение уравнения колебаний бесконечной струны* $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,$$ *удовлетворяющее следующему*	*По формуле Даламбера получаем:* $$u(t,x)=\frac{cos(x+t)+cos(x-t)}{2}+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\frac{1}{z^2+1}dz=$$	5

№ п/п	Тип задания	Формулировка задания	Правильный ответ	Время выполнения (в минутах)
		начальному условию: $\begin{cases} u(0,x) = cosx \\ u_t'(0,x) = \dfrac{1}{x^2+1} \end{cases}$	$= cosxcost + \frac{1}{2}arctg(x+t) - \frac{1}{2}arctg(x-t).$	
18.		*Найти форму струны, определяемой уравнением* $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ *в момент* $t = \frac{\pi}{2a}$, *если* $u\vert_{t=0} = sinx, \frac{\partial u}{\partial t}\Big\vert_{t=0} = 1.$	*Используя формулу Даламбера, находим:* $u(t,x) = \frac{\sin(x+at)+\sin(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} dz = \frac{1}{2}(sinxcosat + cosxsinat + sinxcosat - cosxsinat) + \frac{1}{2a}z\vert_{x-at}^{x+at} = sinxcosat + (x+at-x+at)\frac{1}{2a} = sinxcosat + t.$ *При* $t = \frac{\pi}{2a}$ *получаем:* $u = sinxcos\left(a\frac{\pi}{2a}\right) + \frac{\pi}{2a} = \frac{\pi}{2a}.$ *Итак, в момент* $t = \frac{\pi}{2a}$ *струна параллельна оси Ох.*	6-7
19.		*Найти область параболичности уравнения* $2x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4y\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - xy\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 5x - 3u = 0$	*Имеем:* $A = 2x, B = 2y, C = -xy, B^2 - AC = 4y^2 + 2x^2y.$ *Область параболичности найдем, решив уравнение* $B^2 - AC = 0$: $4y^2 + 2x^2y = 0 \Leftrightarrow 2y(2y + x^2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ 2y + x^2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = -\frac{x^2}{2} \end{array}\right.$ *Таким образом, область эллиптичности* Ω_2 *нашего уравнения имеет вид* $\Omega_2 = \left\{(x,y)\Big\vert(y=0)\vee(y=-\frac{x^2}{2})\right\}$ 2	6
20.		*Решить задачу Дирихле для круга радиуса R с центром в начале*	*Имеем:* $Г: x^2 + y^2 = R^2.$ *На окружности:* $f(\varphi) = A.$ *Решение представляется рядом*	7-8

№ п/п	Тип задания	Формулировка задания	Правильный ответ	Время выполнения (в минутах)
		координат, если заданы следующие граничные условия: $u\|_{r=R} = A$, где A – постоянная, (r,φ) - полярные координаты.	$u = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n (a_n cosn\varphi + b_n sinn\varphi)$ $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)d\varphi = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} Ad\varphi = \frac{A}{\pi}\varphi\|_0^{2\pi} = 2A;$ $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)cosn\varphi d\varphi = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} Acosn\varphi d\varphi = \frac{A}{\pi}\int_0^{2\pi} cosn\varphi d\varphi = 0;$ $b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)sinn\varphi d\varphi = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} Asinn\varphi d\varphi = \frac{A}{\pi}\int_0^{2\pi} sinn\varphi d\varphi = 0.$ *Получаем:* $u = \frac{a_0}{2} = \frac{2A}{2} = A.$	

7.4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ КАРТА

Таблица 10 – Технологическая карта рейтинговых баллов по дисциплине (модулю) (8 семестр)

№ п/п	Контролируемые мероприятия	Количество мероприятий/ баллы	Максимальное количество баллов	Срок предоставления
Основной блок				

1.	Контрольная работа №1.	15 баллов за правильно выполненное задание 1 и по 10 баллов за правильно выполненные задания 2-4	45	по расписанию
2.	Контрольная работа №2.	10 баллов за правильно выполненное задание 1 и по 15 баллов за правильно выполненные задания 2 и 3	45	по расписанию
Всего			**90**	-
Блок бонусов				
3.	Посещение занятий	0,1 балл за занятие, но не более 2	2	по расписанию
4.	Активность студента на занятиях	0,3 балла за занятие, но не более 3	3	
5.	Выполнение домашнего задания	0,3 балла за занятие, но не более 3	3	
6.	Знание материала выходящего за рамки лекций	0,1 балл за занятие, но не более 2	2	
Всего			**10**	
Итого:			**100**	

Таблица 10 – Технологическая карта рейтинговых баллов по дисциплине (модулю) (9 семестр)

№ п/п	**Контролируемые мероприятия**	**Количество мероприятий/ баллы**	**Максимальное количество баллов**	**Срок предоставления**
Основной блок				
1.	Контрольная работа №3.	12 баллов за правильно выполненное задание 1 и 8 баллов за правильно выполненное задание 2	20	по расписанию

2.	Контрольная работа №4.	10 баллов за правильно выполненное задание 1 и 10 баллов за правильно выполненное задание 2	20	по расписанию
Всего			**40**	-
Блок бонусов				
3.	Посещение занятий	0,1 балл за занятие, но не более 2	2	по расписанию
4.	Активность студента на занятиях	0,3 балла за занятие, но не более 3	3	
5.	Выполнение домашнего задания	0,3 балла за занятие, но не более 3	3	
6.	Знание материала выходящего за рамки лекций	0,1 балл за занятие, но не более 2	2	
Всего			**10**	
Дополнительный блок				
7.	Экзамен	по 25 баллов за каждый правильный ответ на каждый вопрос	50	по расписанию
Всего			**50**	
Итого:			**100**	

Таблица 11 – Система штрафов (для одного занятия)

Показатели	Баллы
Опоздание	-1
Не готов к практической части занятия	-3
Нарушение учебной дисциплины	-2
Пропуск лекций без уважительных причин (за одну лекцию)	-1
Пропуск практических занятий без уважительных причин (за одно занятие)	-1

Таблица 12 – Шкала перевода рейтинговых баллов в итоговую оценку за семестр по дисциплине (модулю)

Сумма баллов	Оценка по 4-балльной шкале	
90–100	5 (отлично)	Зачтено
85–89	4 (хорошо)	
75–84		

Сумма баллов	Оценка по 4-балльной шкале	
70–74		
65–69	3 (удовлетворительно)	
60–64		
Ниже 60	2 (неудовлетворительно)	Не зачтено

При реализации дисциплины (модуля) в зависимости от уровня подготовленности обучающихся могут быть использованы иные формы, методы контроля и оценочные средства, исходя из конкретной ситуации.

8.УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

8.1. Основная литература

1. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 404 с. URL: https://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922110907.html (ЭБС «Консультант студента»).

2. Будак, Б. М. Сборник задач по математической физике. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2004. - 688 с. URL : https://www.studentlibrary.ru/book/ISBN5922103113.html (ЭБС «Консультант студента»).

8.2. Дополнительная литература

1. Олейник, О. А. Лекции об уравнениях с частными производными. Москва: Лаборатория знаний, 2020. - 260 с. URL : https://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785001017035.html (ЭБС «Консультант студента»).

8.3. Интернет-ресурсы, необходимые для освоения дисциплины (модуля)

1. Электронная библиотечная система (ЭБС) ООО «Политехресурс» «Консультант студента»: www.studentlibrary.ru

9. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Рабочая программа дисциплины (модуля) при необходимости может быть адаптирована для обучения (в том числе с применением дистанционных образовательных технологий) лиц с ограниченными возможностями здоровья, инвалидов. Для этого требуется заявление обучающихся, являющихся лицами с ограниченными возможностями здоровья, инвалидами, или их законных представителей и рекомендации психолого-медико-педагогической комиссии. Для инвалидов содержание рабочей программы дисциплины (модуля) может определяться также в соответствии с индивидуальной программой реабилитации инвалида (при наличии).